Problème supplémentaire 5/2 n° 5

Notations

Soit E une partie de $\mathbb{C}$.

À toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E, ce que l'on note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, on associe la suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles de Cesàro définie par

$$\forall n \geqslant 0, \quad \sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k,$$

et la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des écarts définie par

$$\forall n \geqslant 0, \quad e_n = u_{n+1} - u_n.$$

À toute série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, on associe la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles définie par

$$\forall n \geqslant 0, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ est convergente, on note S sa somme définie par

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{N\to+\infty} S_N,$$

et $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des restes définie par

$$\forall n \geqslant 0, \quad R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k.$$

À toute série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, de rayon de convergence $R > 0$, on associe sa somme f définie sur $D(0,R) = \{z \in \mathbb{C}; |z| < R\}$ par

$$\forall z \in D(0,R), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Étant donné un intervalle I de $\mathbb{R}$, on note

$$\mathcal{C}^0(I) = \{f : I \to \mathbb{R}\ ; f \text{ continue sur } I\},$$

$$\mathcal{C}_b^0(I) = \{f : I \to \mathbb{R}\ ; f \text{ continue et bornée sur } I\}.$$

1 Lemme de Cesàro

Le but de cette partie est de démontrer le lemme de Cesàro, voir question 1, d'en proposer des applications et d'établir certaines variantes puis des réciproques partielles.

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Démontrer que

$$\left(\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell\right) \Longrightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \ell\right). \qquad \text{(Cesàro)}$$

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs réelles, démontrer que le résultat subsiste si $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$.

Applications.

2. En utilisant (Cesàro), calculer la limite de la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kn}$. Puis, à l'aide d'une comparaison série-intégrale, donner un équivalent de $(v_n)_{n\geqslant 1}$.
3. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. On suppose que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e_n = \alpha$. En utilisant (Cesàro), donner un équivalent de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in]0,+\infty[^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in]0,+\infty[$. On suppose que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$. Démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$. Démontrer que le résultat subsiste si $\ell = 0$ ou $\ell = +\infty$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$.
5. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$. On suppose que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n = b$. Démontrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) = ab.$$
6. Soient $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} b_n$ deux séries de nombres complexes, convergentes de sommes respectives A et B.

   On note $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ et $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles associées définie par $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k$. Démontrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} C_k \right) = AB. \qquad \text{(Cauchy)}$$

Réciproques partielles.

7. Vérifier que la réciproque de (Cesàro) n'est pas toujours vraie en exhibant une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui ne converge pas et telle que $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.
8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Démontrer que
$$\left(\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \ell \text{ et } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ monotone} \right) \Longrightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \right).$$
   Démontrer que le résultat subsiste pour $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$.
9. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Démontrer que
$$\left(\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \ell \text{ et } e_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \Longrightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \right). \qquad \text{(Hardy faible)}$$
   Indication : on pourra démontrer que pour tout $n \geqslant 1$,
$$\sum_{k=0}^{n} k e_k = n u_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} u_k.$$
10. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Le but de cette question est de démontrer que
$$\left(\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \ell \text{ et } e_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \Longrightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \right). \qquad \text{(Hardy fort)}$$
    On suppose que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \ell$ et $e_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.
    (a) Soit $0 \leqslant n < m$. Démontrer que
$$\sum_{k=n+1}^{m} u_k - (m-n)u_n = \sum_{j=n}^{m-1} (m-j)e_j.$$

(b) En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $2 \leqslant n < m$ on a

$$\left| \frac{(m+1)\sigma_m - (n+1)\sigma_n}{m-n} - u_n \right| \leqslant C \ln \left(\frac{m-1}{n-1} \right)$$

et

$$|u_n - \ell| \leqslant C \ln \left(\frac{m-1}{n-1} \right) + \frac{m+1}{m-n} \left(|\sigma_m - \ell| + |\sigma_n - \ell| \right).$$

(c) En déduire (Hardy fort). *Indication : on pourra prendre $m = 1 + \lfloor \alpha n \rfloor$ avec un paramètre $\alpha > 1$ à choisir, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de $x \in \mathbb{R}$.*

2 Théorème d'Abel

Le but de cette partie est de démontrer le théorème d'Abel, voir question 1, d'en proposer des applications et d'établir certains variantes puis des réciproques partielles.

1. Soit $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geqslant 1$ et de somme f. On note

$$\Delta_{\theta_0} = \left\{ z \in \mathbb{C} \ ; \ |z| < 1 \text{ et } \exists \rho > 0, \ \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0], \ z = 1 - \rho e^{i\theta} \right\}$$

pour $\theta_0 \in [0, \pi/2[$.

Le but de cette question est de démontrer que

$$\left(\sum_{n \geqslant 0} a_n \text{ converge} \right) \Longrightarrow \left(\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right). \qquad \text{(Abel)}$$

(a) Démontrer (Abel) pour $R > 1$.

À partir de maintenant, on suppose que $R = 1$ et que $\sum_{n \geqslant 0} a_n$ converge, et on se donne un $\theta_0 \in [0, \pi/2[$.

(b) Démontrer que pour tous $N \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, on a

$$\sum_{n=0}^{N} a_n z^n - S_N = (z-1) \sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n - R_N \left(z^N - 1 \right).$$

(c) En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, on a

$$f(z) - S = (z-1) \sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n.$$

(d) Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$

$$|f(z) - S| \leqslant |z-1| \sum_{n=0}^{N_0} |R_n| + \varepsilon \frac{|z-1|}{1-|z|}.$$

(e) Démontrer qu'il existe $\rho(\theta_0) > 0$ tel que pour tout $z \in \Delta_{\theta_0}$ de la forme $z = 1 - \rho e^{i\theta}$ avec $0 < \rho \leqslant \rho(\theta_0)$, on a

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} \leqslant \frac{2}{\cos(\theta_0)}.$$

En déduire (Abel).

2. Démontrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

3. Exhiber une série entière $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ de rayon de convergence 1 et de somme f, telle que $f(z)$ converge quand $z \to 1$, $|z| < 1$ et telle que la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n$ ne converge pas.

4. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 et de somme f. Soit $S \in \mathbb{C}$. Le but de cette question est de démontrer que

$$\left(\lim_{\substack{x\to 1^-\\ x\in\mathbb{R}}} f(x) = S \text{ et } a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \Longrightarrow \left(\sum_{n\geqslant 0} a_n \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S\right). \qquad \text{(Taubérien faible)}$$

Dans la suite de cette question on suppose que $\lim_{\substack{x\to 1^-\\ x\in\mathbb{R}}} f(x) = S$ et que $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

(a) Démontrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1[$ on a

$$|S_n - f(x)| \leqslant (1-x)\sum_{k=1}^{n} k|a_k| + \frac{\sup_{k>n}(k|a_k|)}{n(1-x)}.$$

(b) En déduire (Taubérien faible) en spécifiant $x = x_n = 1 - 1/n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 et de somme f. Soit $S \in \mathbb{C}$. Le but de cette question est de démontrer que

$$\left(\lim_{\substack{x\to 1^-\\ x\in\mathbb{R}}} f(x) = S \text{ et } a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \Longrightarrow \left(\sum_{n\geqslant 0} a_n \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S\right). \qquad \text{(Taubérien fort)}$$

On pourra admettre que : *toute fonction continue sur un segment est limite uniforme d'une suite de fonctions polynômes* (théorème de Weierstrass).

(a) Démontrer que, sans perte de généralité, on peut supposer que $S = 0$.

On suppose désormais que $\lim_{\substack{x\to 1^-\\ x\in\mathbb{R}}} f(x) = S$ et que $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, avec $S = 0$.

(b) On définit Θ de la manière suivante

$$\Theta = \left\{\theta : [0,1] \to \mathbb{R}\ ; \forall x \in [0,1[,\ \sum_{n\geqslant 0} a_n \theta(x^n) \text{ converge et } \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \theta(x^n) = 0\right\}.$$

Démontrer que Θ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

(c) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(0) = 0$. Démontrer que $P \in \Theta$.

(d) Démontrer que

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \lim_{\substack{x\to 1^-\\ x\in\mathbb{R}}} (1-x)\cdot\sum_{n=0}^{+\infty} x^n P(x^n) = \int_0^1 P(t)\mathrm{d}t.$$

On définit la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [1/2, 1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(e) Démontrer que pour établir (Taubérien fort), il suffit de démontrer que $g \in \Theta$.

(f) Soit

$$h(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0, \\ \dfrac{g(x) - x}{x(1-x)} & \text{si } x \in]0,1[, \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Étant donné $\varepsilon > 0$, démontrer qu'il existe $s_1, s_2 \in \mathcal{C}^0([0,1])$ vérifiant

$$s_1 \leqslant h \leqslant s_2 \text{ et } \int_0^1 (s_2(x) - s_1(x))\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon.$$

Représenter graphiquement h et deux telles fonctions s_1, s_2.

À partir de maintenant, $\varepsilon > 0$, s_1 et s_2 sont fixés.

(g) Démontrer qu'il existe $T_1, T_2 \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$\sup_{x\in[0,1]} |T_1(x) - s_1(x)| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad \sup_{x\in[0,1]} |T_2(x) - s_2(x)| \leqslant \varepsilon.$$

On pose, pour tout $x \in [0,1]$,

$$P_1(x) = x + x(1-x)(T_1(x) - \varepsilon),\ P_2(x) = x + x(1-x)(T_2(x) + \varepsilon) \ \text{ et } \ Q(x) = \frac{P_2(x) - P_1(x)}{x(1-x)}.$$

(h) Démontrer que

$$P_1(0) = P_2(0) = 0, \quad P_1(1) = P_2(1) = 1, \quad P_1 \leqslant g \leqslant P_2 \text{ et } 0 \leqslant \int_0^1 Q(x)\mathrm{d}x \leqslant 5\varepsilon.$$

(i) Démontrer qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in]0,1[$,

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_1(x^n) \right| \leqslant M(1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} x^n Q(x^n).$$

(j) Conclure.

3 Variantes continues du lemme de Cesàro et du théorème d'Abel

Le but de cette partie est d'étudier des versions continues du lemme de Cesàro, du théorème d'Abel et de leurs réciproques partielles.

1. Soient $f \in \mathcal{C}^0(]0,+\infty[)$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Démontrer que

$$\left(\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \right) \Longrightarrow \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \ell \right).$$

2. À l'aide d'un contre-exemple, démontrer que la réciproque du résultat de la question 1 est fausse.
3. Soient $f \in \mathcal{C}^0(]0,+\infty[)$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Démontrer que

$$\left(\lim_{x\to+\infty} (f(x+1) - f(x)) = \ell \right) \Longrightarrow \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell \right).$$

4. Soit $f \in \mathcal{C}_b^0(]0,+\infty[)$. On définit la transformée de Laplace de f par la fonction

$$\mathcal{L}(f) : t \in]0,+\infty[\mapsto \int_0^{+\infty} e^{-tx} f(x)\mathrm{d}x.$$

Démontrer que $\mathcal{L}(f)$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, et exprimer sa dérivée.

5. Soit $f \in \mathcal{C}_b^0(]0,+\infty[)$. Le but de cette question est de démontrer que

$$\left(\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \text{ converge} \right) \Longrightarrow \left(\lim_{t\to0^+} \mathcal{L}(f)(t) = \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \right).$$

On suppose que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge.

(a) Démontrer que la fonction

$$F : x \in [0,+\infty[\mapsto \int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$$

est bien définie, continue et bornée sur $[0,+\infty[$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et vérifie $F' = -f$.

(b) Démontrer que $\displaystyle\lim_{t\to0^+} \mathcal{L}(f)(t) = \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ par une intégration par parties.

6. Démontrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

7. Soient $f \in \mathcal{C}_b^0(]0, +\infty[)$ et $S \in \mathbb{R}$. Démontrer que

$$\left(\lim_{t \to 0^+} \mathcal{L}(f)(t) = S \text{ et } f(t) = \underset{t \to +\infty}{O} \left(\frac{1}{t} \right) \right) \Longrightarrow \left(\int_0^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x \text{ converge et } \int_0^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x = S \right).$$

Pour cela, en utilisant les notations de la question 5 de la section 2, on pourra démontrer qu'il existe $M > 0$ et $A > 0$ tels que pour tout $t > 0$

$$\begin{aligned} \left| \int_A^{+\infty} f(x) g(e^{-tx}) \mathrm{d}x - \int_A^{+\infty} f(x) P_1(e^{-tx}) \mathrm{d}x \right| &\leqslant M \int_A^{+\infty} Q(e^{-tx}) e^{-tx} \frac{1 - e^{-tx}}{x} \mathrm{d}x \\ &\leqslant M \int_0^1 Q(u) \mathrm{d}u. \end{aligned}$$

• • • FIN • • •
