Problème supplémentaire 5/2 n° 3

L'objectif de ce sujet est d'établir le théorème de Perron-Frobenius pour une certaine classe de matrices symétriques. Ce théorème étudie les espaces propres d'une matrice associés aux valeurs propres de module maximal. Une application, en conclusion, montre une ouverture à l'analyse spectrale des matrices à coefficients positifs.

— La partie I permet d'obtenir des résultats préliminaires, utiles pour les parties suivantes.
— La partie II examine, à titre d'exemple, le cas des matrices à coefficients strictement positifs de taille deux.
— La partie III s'intéresse au lien entre le rayon spectral d'une matrice et le comportement asymptotique de la suite de ses puissances successives ; elle est indépendante de la partie II.
— La partie IV donne une démonstration du théorème pour une classe de matrices symétriques à coefficients positifs ; elle est indépendante des parties II et III.

Notations et définitions

$\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels ou l'ensemble $\mathbb{C}$ des complexes.
Soit n et p deux entiers naturels non nuls.

— On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.
— Si $A = (A_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p}$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on note $|A|$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont $|A_{ij}|$ ($1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$).
— Une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est dite positive (respectivement strictement positive) lorsque tous ses coefficients sont positifs ou nuls (respectivement strictement positifs). La notation $A \geqslant 0$ (respectivement $A > 0$) signifie que la matrice A est positive (respectivement strictement positive).
— Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la notation $A \geqslant B$ (respectivement $A > B$) signifie que la matrice $A - B$ est positive (respectivement strictement positive). De même, la notation $A \leqslant B$ (respectivement $A < B$) signifie que la matrice $B - A$ est positive (respectivement strictement positive).
— Les propriétés suivantes pourront être librement utilisées (sous réserve que les opérations correspondantes puissent être envisagées) :
— $|A + B| \leqslant |A| + |B|$;
— $\left|A^\top\right| = |A|^\top$;
— si $\gamma \in \mathbb{K}$, alors $|\gamma A| = |\gamma||A|$;
— si $A \geqslant 0$ et $B \geqslant 0$, alors $AB \geqslant 0$.
— On rappelle que le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est défini, pour tous vecteurs X et Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, par

$$(X \mid Y) = X^\top Y = \sum_{k=1}^{n} X_k Y_k, \quad \text{où } X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$$

La norme euclidienne (associée à ce produit scalaire) du vecteur X est alors donnée par

$$\|X\| = \sqrt{X^\top X} = \left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2\right)^{1/2}$$

— Le spectre d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $\mathrm{sp}(A)$.
— Le rayon spectral d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de spectre non vide, est le réel positif ou nul, noté $\rho(A)$, défini par

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathrm{sp}(A)\}$$

— On dit qu'une norme $N : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}$ est sous-multiplicative si, pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$N(AB) \leqslant N(A)N(B).$$

I Résultats préliminaires

1. Soit n un entier naturel, A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et X un vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   Montrer que si $A > 0, X \geqslant 0$ et $X \neq 0$, alors $AX > 0$, et que
$$|AB| \leqslant |A||B|.$$
2. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour deux vecteurs $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. En déduire que si n est un entier naturel et $z_1, \ldots, z_n, w_1, \ldots, w_n$ sont des nombres complexes, alors
$$\sum_{k=1}^{n} |z_k|\,|w_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} |w_k|^2\right)^{1/2}.$$
3. Soit z un nombre complexe tel que $|1+z| = 1 + |z|$. Montrer que $z \in \mathbb{R}_+$. En déduire que, si z et z' sont deux nombres complexes vérifiant $|z + z'| = |z| + |z'|$ et $z \neq 0$, alors
$$\exists \alpha \in \mathbb{R}_+ \mid z' = \alpha z.$$
4. Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $z_1, \ldots, z_n$ des nombres complexes non tous nuls tels que
$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|\,.$$
   Montrer que
$$\exists \theta \in \mathbb{R},\ \forall k \in \{1, \ldots, n\}\,,\ z_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|z_k|.$$
   Dans le cas où $z_1 \neq 0$, on pourra appliquer le résultat de la question précédente aux couples (z_1, z_k) pour $k \in \{2, \ldots, n\}$.

II Matrices strictement positives de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Soit a, b, c et d des nombres réels strictement positifs et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

1. Exprimer le discriminant Δ du polynôme caractéristique de A en fonction de a, b, c et d.
2. Montrer que $\Delta > 0$. En déduire qu'il existe deux réels λ et μ, vérifiant $\lambda < \mu$, tels que A soit semblable à la matrice $\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.
3. Montrer que $|\lambda| < \mu$.
4. Montrer que la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une matrice L non nulle si et seulement si $\mu = 1$. En cas de convergence, préciser le rang de L puis montrer que L est la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^2$.
5. Soit α et β deux réels de $]0,1[$ et B la matrice $\begin{pmatrix} 1-\alpha & \beta \\ \alpha & 1-\beta \end{pmatrix}$. Montrer que B est semblable à la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\alpha-\beta \end{pmatrix}$ et donner une matrice S de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, inversible, telle que $B = SDS^{-1}$.
6. En déduire que la suite $\left(B^k\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une matrice Λ que l'on explicitera.

III Normes sous-multiplicatives sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; rayon spectral

III.A - Exemples de normes sous-multiplicatives sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Pour toute matrice $A = (A_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose
$$\|A\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|\right) \quad \text{et} \quad \|A\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|^2\right)^{1/2}.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. On admet que $\|\cdot\|_2$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; montrer que cette norme est sous-multiplicative.
3. Soit N une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et S une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   Montrer que l'on définit une norme sous-multiplicative ν sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ en posant $\nu(A) = N\left(S^{-1}AS\right)$ pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

III.B - Rayon spectral

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

III.B.1)

1. Soit S une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Comparer $\rho(A)$ et $\rho\left(S^{-1}AS\right)$.
2. Justifier que A est trigonalisable.
   Comparer, pour $k \in \mathbb{N}^*, \rho\left(A^k\right)$ et $\rho(A)^k$ et, pour $\alpha \in \mathbb{C}, \rho(\alpha A)$ et $\rho(A)$.
3. Montrer que, pour toute norme N sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\rho(A) \leqslant N(A)$.
   On pourra fixer une valeur propre λ de A et mettre en évidence une matrice $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, non nulle, telle que $AH = \lambda H$.

III.B.2)

Le but de cette section est de montrer que, pour tout réel strictement positif $\varepsilon > 0$, il existe une norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, sous-multiplicative (dépendant de A et de ε), telle que

$$N(A) \leqslant \rho(A) + \varepsilon.$$

À cette fin, on introduit, pour tout réel strictement positif τ, la matrice diagonale

$$D_\tau = \operatorname{diag}\left(1, \tau, \ldots, \tau^{n-1}\right).$$

et on considère une matrice T triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Calculer le produit $D_\tau^{-1}TD_\tau$ en précisant, pour tout $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$, l'expression du coefficient en position (i,j) de la matrice $D_\tau^{-1}TD_\tau$ en fonction de τ et des coefficients de la matrice T.
2. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $\tau \in \mathbb{R}$ vérifiant $|\tau| \leqslant \delta$, on a
$$\left\|D_\tau^{-1}TD_\tau\right\|_\infty \leqslant \rho(T) + \varepsilon.$$
3. Conclure.

III.B.3)

1. Utiliser ce qui précède pour montrer que la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice nulle si et seulement si $\rho(A) < 1$.

IV Théorème de Perron-Frobenius pour une classe de matrices symétriques positives

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et A une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique et positive (c'est-à-dire à coefficients positifs ou nuls). On pose $r = \rho(A)$.

IV.A-

1. Justifier que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Que peut-on dire des sous-espaces propres de A ?
2. Montrer que $r > 0$.
   On note μ la plus grande valeur propre de A.

3. Montrer que, pour tout vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, unitaire pour la norme euclidienne canonique,
$$X^\top A X \leqslant \mu.$$
On pourra faire le calcul dans une base orthonormée convenablement choisie.
4. Montrer que cette inégalité est une égalité si, et seulement si, X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre μ.
5. Montrer que, pour tout vecteur unitaire X,
$$\left|X^\top A X\right| \leqslant |X|^\top A|X| \leqslant \mu.$$
6. En déduire que, pour toute valeur propre λ de A, on a $|\lambda| \leqslant \mu$, et que $\mu = r$.

IV.B-

Dans cette sous-partie uniquement, on suppose en outre que A est strictement positive.

1. Montrer que, si X est un vecteur propre de A, unitaire, associé à la valeur propre r, alors $|X|$ est un vecteur propre de A, unitaire, associé à la valeur propre r, et que $|X| > 0$.
2. Montrer que $X = |X|$ ou $X = -|X|$.
3. Montrer que le sous-espace propre $\ker(A - rI_n)$ est de dimension 1 .
On pourra raisonner par l'absurde en considérant deux vecteurs propres de A orthogonaux associés à r.
4. Montrer que la multiplicité de r, en tant que valeur propre, vaut 1 et en déduire que $-r$ n'est pas valeur propre de A.
Ainsi, r est l'unique valeur propre de A de module égal à r.
5. Montrer que cette propriété n'est pas forcément vérifiée si A est seulement supposée positive.
On pourra chercher des exemples dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

IV.C-

On suppose dans cette sous-partie qu'il existe un entier $p \geqslant 2$ tel que A^p est strictement positive.
D'après la question 6, r est une valeur propre de A.

1. Montrer que l'espace propre $\ker(A - rI_n)$ est de dimension 1 , engendré par un vecteur strictement positif.
2. Montrer que r est l'unique valeur propre de A de module égal à r.
On pourra distinguer deux cas suivant la parité de p.

IV.D - Une application : un théorème de Ky Fan

On admet que les résultats obtenus pour les matrices symétriques strictement positives, ou positives admettant une puissance strictement positive, restent vrais pour une matrice strictement positive. Ainsi, si B est une matrice strictement positive, alors $\rho(B)$ est l'unique valeur propre de B de module maximal, elle est de multiplicité 1 en tant que valeur propre et son espace propre est de dimension 1.

Soit $A = (A_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = (B_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice strictement positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\operatorname{sp}(A) \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C},\ |z - A_{ii}| \leqslant \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |A_{ij}| \right\}$

On suppose que, pour tout couple $(i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2$ tel que $i \neq j$, on a $|A_{ij}| \leqslant B_{ij}$.

1. Montrer que $\operatorname{sp}(A) \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \{ z \in \mathbb{C},\ |z - A_{ii}| \leqslant \rho(B) - B_{ii} \}$
On pourra considérer un vecteur propre $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ de B, strictement positif, associé à la valeur propre $\rho(B)$, et utiliser la matrice $D^{-1}AD$, où $D = \operatorname{diag}(X_1, \ldots, X_n)$.

Fin de l'énoncé
