Problème supplémentaire 5/2 n$^{\text{o}}$ 2

I - Première partie

1. a) • Si cette droite est stable, alors $f(u) \in \text{vect}(u)$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(u) = \lambda u$, et comme u est non nul, u est un vecteur propre de f.

   • Réciproquement, si u est un vecteur propre de f, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(u) = \lambda u$. Soit $x \in \text{vect}(u)$: il s'écrit αu pour un certain scalaire α. Alors on a $f(x) = f(\alpha u) = \alpha f(u) = \alpha\lambda u \in \text{vect}(u)$, donc la droite engendrée par u est stable par f.

   b) Puisque B est triangulaire supérieure, les valeurs propres de g sont en évidence sur la diagonale de B. On a donc $\text{Spec}(f) = \{1, 2\}$.

   Puis $B - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice de rang 2 (les colonnes C_2 et C_3 sont indépendantes). Il en résulte (théorème du rang) que $\dim \ker(g - \text{Id}_E) = 1$. Comme la première colonne de B est nulle, on a $E_1 = \ker(g - \text{Id}_E) = \text{vect}(e_1)$.

   On trouve de même que $E_2 = \ker(g - 2\text{Id}_E) = \text{vect}(e_3)$. Selon la question précédente, les droites de $\mathbb{R}^3$ stables par g sont les droites $\text{vect}(e_1)$ et $\text{vect}(e_3)$.

2. a) • Les sous-espace $\{0\}$ et E sont stables par f.

   • Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

   On a $\chi_C = X^2 + 1$ donc χ_C n'a pas de racines réelles et g n'a pas de valeurs propres donc pas de vecteurs propres : selon la première question, aucune droite de $\mathbb{R}^2$ n'est stable par g.

   b) • On suppose que E est de dimension finie $n \geqslant 2$ et que f est non nul et non injectif.

   Comme f est non nul et non injectif, on a $\ker f \neq \{0\}$ et $\ker f \neq E$ et il en va de même de $\text{Im}\, f$. Mais $\ker f$ et $\text{Im}\, f$ sont f-stables, ce qui nous donne (avec $\{0\}$ et E) au moins trois sous-espaces stables par f.

   • Si de plus n est impair, on ne peut avoir $\ker f = \text{Im}\, f$ (écrire le théorème du rang !), ce qui nous donne donc au moins 4 sous-espaces stables.

   • On prend l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2) est :

   $$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Cette matrice n'admet qu'une seule valeur propre qui est 0 et $\ker g = \text{Im}\, g = \text{vect}(e_1)$ donc g n'admet qu'une seule droite stable qui est $\text{vect}(e_1)$. Les seuls sous-espaces stables par g sont donc $\text{vect}(e_1)$, $\{0\}$ et E.

3. a) • On suppose que $(v_1, \ldots, v_p)$ est une famille de vecteurs propres de f associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ (qui peuvent être égales !).

   Soit $x \in \text{vect}(v_1, \ldots, v_p)$. On peut alors écrire $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i$ où les α_i sont des scalaires. Il vient alors :

   $$f(x) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f(v_i) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \lambda_i v_i \in \text{vect}(v_1, \ldots, v_p).$$

Ainsi $\mathrm{vect}(v_1, \ldots, v_p)$ est stable par f.

• Si F est un sous-espace propre de f il existe λ scalaire tel que $F = \ker(f - \lambda \mathrm{Id})$. Ainsi pour tout x dans F, on a $f(x) = \lambda x$ ce qui permet de dire que l'endomorphisme induit par f sur F est $\lambda \mathrm{Id}_F$.

b) On suppose que f admet un sous-espace propre F de dimension au moins égale à 2.
Soit $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$une famille libre dans F et λ la valeur propre associée à F. Pour tout α dans $\mathbb{K}$ on a :

$$f(\varepsilon_1 + \alpha\varepsilon_2) = \lambda(\varepsilon_1 + \alpha\varepsilon_2).$$

Ainsi la droite $\mathrm{vect}(\varepsilon_1 + \alpha\varepsilon_2)$ est stable par f : il existe une infinité de droites de E stables par f.

c) On suppose que tous les sous-espaces de E sont stables par f. En particulier, dès que x est non nul dans E, la droite $\mathrm{vect}(x)$ est stable par f et d'après la première question, x est un vecteur propre de f.
Pour x non nul dans E, on note λ_x l'unique scalaire tel que $f(x) = \lambda_x x$ (l'unicité vient du fait que $x \neq 0$).
Soient alors deux vecteurs non nuls x et y de E. Montrons que $\lambda_x = \lambda_y$.
On a $f(x+y) = \begin{cases} f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y \\ \lambda_{x+y}(x+y) \end{cases}$.
Ainsi $\lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_x x + \lambda_y y$ donc $()\lambda_x - \lambda_{x+y})x + (\lambda_y - \lambda_{x+y})y = 0$.
Si (x, y) est libre il vient donc $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$.

Sinon (x, y) est liée. Dans ce cas il existe α scalaire, non nuls, tel que $y = \alpha x$ et il vient :

$$f(y) = \begin{cases} f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha\lambda_x x \\ \lambda_y y = \lambda_y \alpha x \end{cases}$$

. De là on a : $\alpha(\lambda_x - \lambda_y)x = 0$ et comme α et x sont non nuls, il vient $\lambda_x = \lambda_y$.

Conclusion. La fonction f est une homothétie !

4. a) • Comme f est inversible $\dim F = \dim f(F)$; Or, par stabilité, $f(F) \subset F$. Il vient donc $F = f(F)$.

• Soit $y \in F = f(F)$. Il existe donc $x \in F$ tel que $y = f(x)$. En appliquant f^{-1}, il vient :

$$f^{-1}(y) = f^{-1} \circ f(x) = x \in F$$

Ainsi F est stable par f^{-1}.

b) Soit F un sous-espace de E et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de f (elle existe par hypothèse de diagonalisablité de f).
Si $F = \{0\}$ ou E, il admet un supplémentaire stable qui est E et c'est fini. Sinon, F possède une base $(v_1, \ldots, v_r)$ avec $r < n$: il existe donc un vecteur ε_{r+1} de la base $\mathcal{B}$ qui n'appartient pas à F et la famille $(v_1, \ldots, v_r, \varepsilon_{r+1})$ est libre. S
Si cette dernière famille n'engendre pas E alors on peut trouver un autre vecteur ε_{r+1} de $\mathcal{B}$ tel que la famille $(v_1, \ldots, v_r, \varepsilon_{r+1}, \varepsilon_{r+2})$ soit libre. On itère ce raisonnement jusqu'à ce que la famille libre $(v_1, \ldots, v_r, \varepsilon_{r+1}, \ldots, \varepsilon_n)$ engendre E.

On pose : $G = \mathrm{vect}(\varepsilon_{r+1}, \ldots, \varepsilon_n)$..

Par construction, F et G sont supplémentaires, et G est stable puisqu'il est engendré par une famille de vecteurs propres de f

c) • On raisonne par récurrence sur la dimension $n \geqslant 1$ de E. Si $n = 1$, tous les endomorphismes de E sont des homothéties puisque E est une droite, donc ils sont diagonalisables.

Si la propriété est établie pour tous les espaces de dimension $n - 1$, considérons un espace vectoriel complexe E de dimension n, et un endomorphisme f de E tel que tout sous-espace de E stable par f admet un supplémentaire stable par f.

Le théorème de d'Alembert Gauss affirme que χ_f possède au moins une racine, donc que f possède au moins un vecteur propre, noté x. On pose $D = \text{vect}(x)$, alors D est stable par f, donc possède un supplémentaire stable par f, que l'on note H, et qui est un hyperplan de E.

Montrons que tout sous-espace vectoriel G de H stable par f_H possède un supplémentaire (dans H) stable par f_H. En effet, un tel sous-espace G est *a fortiori* stable par f, donc possède un supplémentaire K (dans E) stable par f, et on constate que

$$K \cap H$$

est un supplémentaire de G *dans l'hyperplan* H, stable par *l'endomorphisme induit* f_H. L'hypothèse de récurrence s'applique donc à f_H, qui est diagonalisable. Il suffit de mettre bout à bout x et une base propre de f_H pour obtenir une base de E qui soit propre pour f, ce qui montre que f est diagonalisable.

• Comme le prouve l'exemple à la question 2a), si le corps de base est celui des réels, le résultat est faux.

II - Deuxième partie

5. a) Soit F un sous-espace de E tel que $F = \bigoplus_{i=1}^{p}(F \cap E_i)$. Soit $x \in F$. On peut écrire $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$, où, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $x_i \in F \cap E_i$.

On a alors : $f(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \in \bigoplus_{i=1}^{p}(F \cap E_i) = F$. Ainsi F est stable par f.

b) Comme $x \in E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$, il existe un unique p-uplet de vecteurs $(x_1, \ldots, x_p)$ dans $E_1 \times \cdots \times E_p$ tel que : $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$.

c) Comme $\mathcal{B}_x$ engendre V_x, il suffit de montrer que c'est une famille libre. Mais c'est une famille de vecteurs propres associés à des valeurs **propres distinctes** : elle est libre.

d) Une récurrence immédiate (à faire) sur $j \in \mathbb{N}^*$ montre que

$$f^{j-1}(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^{j-1} x_i,$$

donc $f^{j-1}(x)$ est une combinaison linéaire de la famille $(x_1, \ldots, x_r)$, il appartient à V_x. C'est en particulier vrai pour $j \in [\![1, r]\!]$.

D'après le calcul ci-dessus, la matrice de la famille $(f^{j-1}(x))_{1 \leqslant j \leqslant r}$ dans la base $\mathcal{B}_x$ est la matrice de Vandermonde d'ordre r suivante

$$W(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{r-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{r-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_r & \cdots & \lambda_r^{r-1} \end{pmatrix}.$$

e) Comme les λ_i sont deux à deux distincts, le déterminant (de Vandermonde...) de W est non nul (théorème du cours), donc la famille $(f^{j-1}(x))_{1\leqslant j\leqslant r}$ est une base de V_x.

f) Soit i dans $[\![1,r]\!]$. Comme x_i appartient à V_x, et comme $(f^{j-1}(x))_{1\leqslant j\leqslant r}$ est une base de V_x, le vecteur x_i est une combinaison linéaire des $f^{j-1}(x)$ pour $1\leqslant j\leqslant r$. Comme F est stable par f et $x\in F$, les $f^{j-1}(x)$ appartient à F, donc x_i appartient à F.

Ainsi $x=\displaystyle\sum_{i=1}^{r}x_i$ appartient à $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{r}(F\cap E_i)$ et on a donc prouvé l'inclusion

$$F\subset\bigoplus_{i=1}^{r}(F\cap E_i).$$

L'inclusion inverse étant évidente, on a prouvé l'égalité, ce qui fallait démontrer.

6. a) Comme f admet n valeurs propres distinctes, $\dim E_i=1$ pour tout i dans $[\![1,p]\!]$.

b) D'après la question 1 , il y a exactement n droites stables par f : les droites $E_1,\dots,E_n$.

c) On suppose $n\geqslant 3$ et $k\in[\![2,n-1]\!]$.
Soit F un sous-espace de E stable par f et de dimension k. D'après la question 5, on a $F=\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n}(F\cap E_i)$. Comme les E_i sont des droites, leurs sous-espaces $F\cap E_i$ sont soit nuls, soit égaux à E_i.
Enfin, comme $\dim F=k$, il y exactement k indices $i\in[\![1,n]\!]$ tels que $F\cap E_i=E_I$, les autres indices vérifient $F\cap E_i=\{0\}$.
Un tel F sous-espace Fest donc entièrement déterminé par le choix de k indices i parmi n.
Il existe donc $\displaystyle\binom{n}{k}$ sous-espaces de E de dimension k et stables par f (la question précédente rentre dans ce cadre, d'ailleurs).

d) Il suffit de les compter selon leur dimension $k\in[\![0,n]\!]$, et on trouve

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$$

sous-espaces de E stables par f dans ce cas. Il s'agit des sommes directes $\displaystyle\bigoplus_{i\in J}E_i$, où J parcourt l'ensemble des parties finies de $[\![1,n]\!]$.

III - Troisième partie

7. a) La dérivation diminue le degré d'une unité pour les polynômes (non nuls), donc $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par D.
En notant D_n l'endomorphisme induit par D sur $\mathbb{K}_n[X]$. La matrice de D_n dans la base canonique ordonnée par degrés croissants est

$$A_n=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&&\vdots\\\vdots&\vdots&&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&\cdots&0&n\\0&0&\cdots&\cdots&0&0\end{pmatrix}.$$

b) i) Soit $(P_1, \dots, P_N)$ une base de F. Quitte à changer l'indexation de séléments de cette base, on peut supposer que le polynôme P_N est celui de plus au degré.

Si $P \in F$ on a alors $\deg P \leqslant \deg P_N = n$ et ainsi $F \subset \mathbb{K}_n[X]$..

En prenant $R = P_N$ on est rendu.

ii) La famille $(D^i(R))_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est formée de polynôme de degrés échelonnés, donc elle est libre et est dans F car F est D-stable.

iii) On a $F \subset \mathbb{K}_n[X]$ et d'après la question ci-dessus, $\dim F = n + 1$. On peut conclure que $F = \mathbb{K}_n[X]$

c) Les questions 7a) et 7b) montrent que les sous-espaces de $\mathbb{K}[X]$ stables par D sont $\{0\}$, $\mathbb{K}[X]$, et tous les sous-espaces $\mathbb{K}_n[X]$ avec $n \in \mathbb{N}$.

8. a) • Si $u \in \ker f^{n-1}$ alors la famille $\mathcal{B}_{f,u}$ est liée car elle contient le vecteur nul.

• Prenons $u \in E \setminus \ker f^{n-1}$. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ dans $\mathbb{K}$ tels que :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{n-i} f^{n-i}(u) = 0,$$

on applique f^{n-1} à cette égalité, et il ne reste que $\lambda_n f^{n-1}(u) = 0$, donc $\lambda_n = 0$. On applique alors f^{n-2}, ce qui donne $\lambda_{n-1} = 0$ *etc* (on peut rédiger une démonstration par récurrence, ou raisonner par l'absurde comme on a fait en TD). Finalement, la famille $\mathcal{B}_{f,u}$ est libre, et comme elle comporte $n = \dim(E)$ vecteurs, c'est une base de E.

b) Dans le cas où $\mathcal{B}_{f,u}$ est une base de E, la matrice de f dans $\mathcal{B}_{f,u}$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Toute famille $\mathcal{C} = (a_i f^{n-i}(u))_{1 \leqslant i \leqslant n}$, déduite de la base $\mathcal{B}_{f,u}$ en multipliant les vecteurs de cette dernière par des scalaires supposés non nuls a_i, est encore une base de E. La matrice de f dans $\mathcal{C}$ sera A_{n-1} si et seulement si

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad f(a_i f^{n-i}(u)) = (i-1) a_{i-1} f^{n-(i-1)}(u),$$

ou encore si et seulement si

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad a_i = (i-1) a_{i-1}.$$

On choisit alors $a_1 = 1$ et cela entraîne que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $a_i = (i-1)!$. En conclusion, la matrice de f sur la base suivante vaut A_{n-1} :

$$\mathcal{C} = \big((i-1)! f^{n-i}(u)\big)_{1 \leqslant i \leqslant n}.$$

d) • D'après la question 7c), les sous-espaces de E stables par f sont alors $\{0\}$ et tous ceux de la forme $\mathrm{vect}((i-1)! f^{n-i}(u)))_{1 \leqslant i \leqslant r} = \mathrm{vect}(f^{n-i}(u)_{1 \leqslant i \leqslant r})$ pour $1 \leqslant r \leqslant n$ (le dernier d'entre eux valant E).

• En élevant A_{n-1} à la puissance r (la diagonale partielle de 1 se trouve alors à la r-ième surdiagonale), le noyau de A^r apparaît de manière évidente et il vient $\ker(f^r) = \mathrm{vect}(f^{n-i}(u))_{1 \leqslant i \leqslant r}$

IV - Quatrième partie

9. La matrice de f dans $\mathcal{B}_n$ est M.

10. Si n est impair, alors χ_f est un polynôme unitaire de degré impair à coefficients réels. Sa fonction polynomiale associée (qui est continue) possède donc les limites $-\infty$ en $-\infty$, et $+\infty$ en $+\infty$ et par le théorème des valeurs intermédiaires admet un zéro au moins Ainsi f admet au moins une valeur propre réelle.

11. a) Les composantes de X et Y sont respectivement les parties réelles et imaginaires des z_i : ce sont des réels, donc X et Y appartiennent à E.

    Notons tout d'abord que :

    - Il est impossible que Z soit réel (c'est-à-dire que Y sont nul), sinon, en choisissant une de ses composantes non nulles notée z_k, on déduirait de la relation $MZ = \lambda Z$ que
    $$\lambda = \frac{1}{z_k}\sum_{j=1}^{n} m_{k,j} z_j,$$
    donc λ serait réel.
    - Il est impossible que Z soit imaginaire pur (c'est-à-dire que X soit nul), sinon on pourrait l'écrire iU avec $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul, et la relation $MZ = \lambda Z$ donnerait $MU = \lambda U$: le raisonnement du cas précédent fournirait alors une contradiction.

    On suppose maintenant que la famille (X, Y) est liée. Grâce aux remarques, on peut traduire cette hypothèse par l'existence de $k \in \mathbb{R}$ tel que $Y = kX$. La relation $MZ = \lambda Z$ s'écrit alors $M(1 + ik)X = \lambda(1 + ik)X$, d'où l'on tire $MX = \lambda X$ avec $X \neq 0$, et on obtient la même contradiction qu'à la première remarque ci-dessus.

    b) De l'égalité $MZ = \lambda Z$, comme M est à coefficients réels, on tire $M\overline{Z} = \overline{\lambda}\,\overline{Z}$. Par ailleurs, les définitions même X et Y donnent $Z = X + iY$ et $\overline{Z} = X - iY$. On obtient alors
    $$\begin{aligned} MX &= \frac{1}{2}(MZ + M\overline{Z}) = \frac{1}{2}(\lambda Z + \overline{\lambda}\,\overline{Z}) = \frac{1}{2}\left(\lambda[X + iY] + \overline{\lambda}[X - iY]\right), \\ &= \frac{\lambda + \overline{\lambda}}{2}X - \frac{\lambda - \overline{\lambda}}{2i}Y = \alpha X - \beta Y, \end{aligned}$$
    et :
    $$\begin{aligned} MY &= \frac{1}{2i}(MZ - M\overline{Z}) = \frac{1}{2i}\left(\lambda Z - \overline{\lambda}\,\overline{Z}\right) = \frac{1}{2i}\left(\lambda[X + iY] - \overline{\lambda}[X - iY]\right), \\ &= \frac{\lambda - \overline{\lambda}}{2i}X + \frac{\lambda + \overline{\lambda}}{2}Y = \beta X + \alpha Y. \end{aligned}$$
    Comme MX et MY appartient à $F = \mathrm{vect}(X, Y)$, ce plan est stable par f, et on lit dans les calculs ci-dessus que la matrice de f_F dans la base (X, Y) vaut
    $$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

12. L'affirmation est vraie car, si un endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension finie n'admet une droite stable, c'est qu'il n'admet pas de valeur propre réelle (question 1). Mais sa matrice dans une base admet au moins une valeur propre complexe non réelle (théorème de d'Alembert-Gauss), la question 11b) montre qu'il possède un plan stable.

13. On considère $\varphi = \begin{pmatrix} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & XP \end{pmatrix}$.

    Si F est un sous-espace stable par φ et non réduit à $\{0\}$, il contient un polynôme non nul P_0, donc il contient tous les itérés $\varphi^k(P_0)$ par stabilité pour k dans $\mathbb{N}$. Or pour tout polynôme P non nul, $\deg(\varphi(P)) = \deg(P) + 1$. De là la famille $(\varphi^k(P_0))_{k\in\mathbb{N}}$ est à degrés échelonnés, donc libre, et la dimension de F ne peut pas être finie. En particulier, φ ne possède ni droite ni plan stable.

V - Cinquième partie

14. a) On anticipe la notation du (futur) produit scalaire.

    Un produit scalaire étant une application bilinéaire de E^2 dans $\mathbb{R}$, il est déterminé de manière unique par la valeur des nombres $\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle$. Il suffit donc de montrer que l'unique forme bilinéaire définie par

    $$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = \delta_{i,j}$$

    est bien un produit scalaire. Or l'expression d'une telle forme est (développement par bilinéarité) :

    $$\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

    où les x_i et les y_i désignent les composantes de x et y dans $\mathcal{B}$. On reconnaît alors l'expression d'un produit scalaire (c'est un résultat du cours).

    b) La relation demandée est

    $$\langle u, v \rangle = u \cdot v = {}^t U V.$$

15. L'hyperplan H est stable par f si et seulement pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^tUX = 0$, on a ${}^tU(AX) = 0$, ou encore

    $$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tXU = 0 \Longrightarrow {}^tX\,{}^tAU = 0.$$

    L'énoncé ci-dessus est équivalent à la proposition suivante : le vecteur ${}^tAU$ est orthogonal à $\tilde{H}$, qui est l'hyperplan de $\mathbb{R}^n$ formé des colonnes de composantes dans $\mathcal{B}$ des vecteurs de H. Comme $\tilde{H}$ est un hyperplan et que U dirige la droite $\tilde{D} = (\tilde{H})^\perp$, dire que ${}^tAU$ est orthogonal à $\tilde{H}$, c'est dire que ${}^tAU$ est colinéaire à U, autrement dit que U est un vecteur propre de la transposée de A.

16. On sait déjà que le plan F de la question IV.F.1 est stable par A. On va montrer qu'il n'en existe pas d'autre, en suivant la démarche proposée à la question V.B.

    Si $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire canonique, si P est un plan de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dont U est un vecteur normal, P est stable par A si et seulement si U est un vecteur propre de ${}^tA$. Or ${}^tA$ possède le même polynôme caractéristique que A, donc l'unique valeur propre de ${}^tA$ vaut 1. On résout donc ${}^tAX = X$, où $X = {}^t(x_1, x_2, x_3)$:

    $$\begin{aligned} {}^tAX = X &\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x_2 + x_3 &=& 0, \\ -4x_1 - 3x_2 + x_3 &=& 0, \\ -x_2 - x_3 &=& 0, \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x_2 + x_3 &=& 0, \\ x_1 + x_2 &=& 0. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Le sous-espace propre $E_1({}^tA)$ est une droite, engendrée par $U = {}^t(1, -1, 1)$, donc l'unique plan stable de A a pour équation $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ dans la base canonique. On retrouve bien le plan F.

17. a) Comme l'endomorphisme f est diagonalisable, il possède une base propre $\mathcal{B} = (\varepsilon_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Les n sous-espaces vectoriels

$$H_j = \mathrm{vect}(\varepsilon_i)_{1 \leqslant i \leqslant n,\, i \neq j} \quad \text{pour} \quad j \in [\![1, n]\!],$$

sont des hyperplans (car $\mathcal{B}$ est libre) stables par f (d'après la question I.C.1, car ils sont engendrés par une famille de vecteurs propres de f) et d'intersection nulle (car un vecteur de H_j est un vecteur dont la composante selon ε_j est nulle : s'il est dans $\cap_{i=1}^n H_i$, toutes ses composantes sont nulles).

b) La réponse est oui.

On munit E d'un produit scalaire, et on note A la matrice de f dans une base orthonormale pour ce produit scalaire. Soient $H_1, \dots, H_n$ des hyperplans de E stables par f et d'intersection réduite au vecteur nul. Soient $u_1, \dots, u_n$ des vecteurs normaux à $H_1, \dots, H_n$ respectivement. On pose $V = \mathrm{vect}(u_1, \dots, u_n)$. Soit $x \in E$. On a les équivalences suivantes :

$$x \in V^\perp \iff \forall x \in [\![1, n]\!],\ \langle x, u_i \rangle = 0 \iff \forall x \in [\![1, n]\!],\ x_i \in H_i \iff x \in \bigcap_{i=1}^{n} H_i.$$

On en déduit que $V^\perp = \{0\}$, donc que $V = (V^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = E$, donc que la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est génératrice de E, donc est une base de E. Or cette famille est, d'après la question V.B, composée de vecteurs propres de ${}^tA$. La matrice ${}^tA$ possède donc une base propre, c'est-à-dire est diagonalisable, donc A l'est aussi (si $D = P^{-1}\,{}^tAP$ est diagonale, alors ${}^tPA\,{}^tP^{-1} = {}^tD = D$ aussi), donc f est diagonalisable.

Fin de la correction
