Devoir n° 3

Pour le jeudi 15 octobre 2026

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*La **présentation** de la copie doit être correcte, les résultats mis en valeur et les feuilles numérotées. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. La clarté, la précision et la concision de la rédaction entrent dans une part importante de l'évaluation.*

Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun.

Exercice 1

1. • Il est inutile de préciser la norme choisie sur $\mathbb{R}^2$ car $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie et toutes les normes y sont équivalentes Or pour des normes équivalentes les notions de parties fermées et bornées coïncident.

   • Soit $f : (x, y) \mapsto |x - 1| + |y + 2|$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
   - Les fonctions $(x, y) \mapsto x - 1$ et $(x, y) \mapsto y + 2$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiales.
   - Par composition avec la valeur absolue, qui est continue sur $\mathbb{R}$, les fonctions $(x, y) \mapsto |x - 1|$ et $(x, y)\, |y + 2|$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiales.

   Ainsi la fonction f est continue (par somme) sur $\mathbb{R}^2$ et on a $K = f^{-1}([0, 4])$ où $[0, 4]$ est un fermé de $\mathbb{R}$, donc K est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

   Autre idée. En posant $a = (1, -2)$, l'ensemble K est la sphère de centre a et de rayon 4 pour la norme $\| \ \|_1$: on sait d'après le cours que c'est une partie fermée, et bornée de $\mathbb{R}^2$.

   • Pour $v = (x, y)$ dans K on a :

   $$\begin{aligned} |x| + |y| &= |x - 1 + 1| + |y + 2 - 2| \leqslant |x - 1| + 1 + |y + 2| + 2 \\ &\leqslant 7 \end{aligned}$$

   Ainsi $\|v\|_1 \leqslant 7$ ce qui montre que K est borné.

   Autre idée, bien plus rapide. En posant $a = (1, -2)$, l'ensemble K est la sphère de centre a et de rayon 4 pour la norme $\| \ \|_1$: on sait d'après le cours que c'est une partie fermée, et bornée de $\mathbb{R}^2$.

2. a) Je laisse l'homogénéïté et l'inégalité triangulaire au lecteur.

   Si maintenant $\|f\| = 0$ alors on a $|f(0)| + \displaystyle\int_0^1 |f'| = 0$. Ainsi (somme de termes positifs qui est nulle), il vient $|f(0)| = 0 (donc f(0)=0)$ et $\displaystyle\int_0^1 |f'| = 0$. Comme $|f'|$ est continue et positive, on a donc $|f'| = 0$ sur $[0, 1]$ donc $f' = 0$. et ainsi f est constante sur $[0, 1]$. Comme $f(0) = 0$, il vient $f = 0$.

   b) Pour tout $x \in [0, 1]$ on a $f(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t$ et ainsi :

   $$|f(x)| \leqslant |f(0)| + \underbrace{\int_0^x |f'(t)|\, \mathrm{d}t}_{\leqslant \int_0^1 |f'(t)|\, \mathrm{d}t} \leqslant \|f\|$$

   Ainsi $A = 1$ convient.

   c) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, 1]$. On pose $f_n(t) = \cos(2\pi n t)$. On a $\|f_n\|_\infty = 1$ et $f_n'(t) = -2\pi n \sin(2\pi n t)$. Ainsi

   $$\int_0^1 |f_n'(t)|\, \mathrm{d}t = 2\pi n \int_0^1 |\sin(2\pi n t)|\, \mathrm{d}t \underbrace{=}_{u = 2n\pi} \int_0^{2\pi n} |\sin u|\, \mathrm{d}u = \sum_{k=0}^{2n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin u|\, \mathrm{d}u.$$

   Mais pour $k \in \mathbb{N}$ on a :

   $$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin u|\, \mathrm{d}u \underbrace{=}_{t = u - k\pi} \int_0^\pi |\sin(t + k\pi)|\, \mathrm{d}t = \int_0^\pi |\sin t|\, \mathrm{d}t = \int_0^\pi \sin t\, \mathrm{d}t = 2.$$

Ainsi on a $\displaystyle\int_0^1 |f_n'(t)|\ \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{2n-1} 2 = 4n-2$ et ainsi :

$$\|f_n\| = |f_n(0)| + 4n - 2 = 4n - 1 \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Ces deux normes ne sont pas équivalentes.

d) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$ on pose $f_n(t) = t^n$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} \|f_n\|_\infty = 1 \\ \|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1} \end{cases}$$

Ainsi la suite (f_n) converge vers la fonction nulle pour la norme $\|\ \|_1$ et ce n'est pas le cas pour la $\|\ \|_\infty$: ces deux normes ne sont pas équivalentes.

3. a) On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente d'indice p, i.e. $A^p = 0$ et $A^{p-1} \neq 0$.
Justifier qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $(X, AX, \ldots, A^{n-1}X)$ soit une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Comme $A^{p-1} \neq 0$, il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $A^{p-1}X \neq 0$. Montrons que $(X, AX, \ldots, A^{n-1}X)$ est une famille libre.
Soient $\alpha_0, \ldots, \alpha_{p-1}$ tels que :

$$\alpha_0 X + \alpha_1 AX + \cdots + \alpha_{p-1}A^{p-1}(X) = 0 \quad (\spadesuit)$$

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $m \in \{0, \ldots, p-1\}$ tel que $\alpha_m \neq 0$. Ainsi l'ensemble $\{m \in \{0, \ldots, p-1\} \mid \alpha_i \neq 0\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$: elle admet un plus petit élément m_0.
On applique alors A^{p-1-m_0} à $(\spadesuit)$ pour obtenir : $\alpha_{m_0}A^{p-1}X = 0$. Comme $A^{p-1}X \neq 0$, on obtient l'absurdité $\alpha_{m_0} = 0$. Ainsi tous les coefficients α_i sont nuls.

b) • On a $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^n = 0\} \subset \mathcal{N}$. Si maintenant $A \in \mathcal{N}$ d'indice de nilpotence p, alors d'après la question précédente $p \leqslant n$ puisqu'on dispose d'une famille libre de p vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n. Il vient donc $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^n = 0\} \supset \mathcal{N}$.

• On a $\mathcal{N} = f^{-1}(\{0_n\})$ où $f : M \mapsto M^n$ est une application continue (car ses composantes sont polynomiales) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui même. Ainsi, comme $\{0_n\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{N}$ aussi.

Exercice 2

1. E contient la suite nulle et si $(u, v) \in E^2$, $\lambda \in R$ on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(u + \lambda v)_n = u_n + \lambda v_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $u + \lambda v \in E$.

2. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de E. Ainsi : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant N_\varepsilon)(|u_n| \leqslant \varepsilon)$.
Avec $\varepsilon = 1$, il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait : $|u_n| \leqslant 1$.

On a ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n| \leqslant M = \max(|u_0|, \ldots, |u_1|, 1)$. La suite u est bornée.

3. Soient u et v dans E et λ réel.
   - La suite u est bornée : ainsi $\|u\|$ est correctement définie.
   - Si $\|u\| = 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = 0$, donc $u = 0$. et $\|0\| = 0$.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\lambda u_n| = |\lambda|\,|u_n| \leqslant |\lambda\,\|u\||$ donc

     $$\|\lambda u\| \leqslant |\lambda|\,\|u\|.$$

     Si λ est non nul, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

     $$|u_n| = \frac{1}{|\lambda|}\,|\lambda u_n| \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\,\|\lambda u\|,$$

     donc $\|u\| \leqslant \dfrac{1}{|\lambda|}\,\|\lambda u\|$ ce qui démontre que $\|\lambda u\| = |\lambda|\,\|u\|$.
   - Pour u et v dans E, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n + v_n| \leqslant |u_n| + |v_n| \leqslant \|u\| + \|v\|$,
     donc $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$.

En conclusion $\|\ \|$ est bien une norme sur E.

4. Alors, si $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{|u_n|}{2^{n+1}} \leqslant \dfrac{\|u\|}{2^{n+1}}$. Comme la série $\sum \dfrac{1}{2^{n+1}}$ converge (série géométrique), la série $\sum \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$ est absolument convergente par domination, donc convergente.

5. On pose, pour toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$: $f(u) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}$.

   a) Il est immédiat de voir que f est une forme linéaire...

   b) Pour tout $u \in E$ on a : $|f(u)| = \left|\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{\leqslant} \|u\| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1/2}{1-1/2}\|u\| = \|u\|$ ..
   Ainsi, comme f est linéaire, elle est lipschitzienne de rapport 1 : f est continue.

Exercice 3 - Une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. • Tout d'abord $\|\ \| : A = [a_{i,j}] \mapsto \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\right)$ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

   • Puis soient $A = [a_{i,j}]$, $B = [b_{i,j}]$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

   ∗ Si $\|A\| = 0$ alors $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\right) = 0$ donc pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$ on a $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| = 0$ et ainsi pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$ on a $|a_{i,j}| = 0$ ce qui signifie que $A = 0$.

   ∗ $\|\lambda A\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |\lambda a_{i,j}|\right) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |\lambda|\,|a_{i,j}|\right) = \|\lambda\| \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\right) = \|\lambda\|\ \|A\|$.

   ∗ On a $A + B = [a_{i,j} + b_{i,j}]$ donc <u>pour tout i dans $\{1,\dots,n\}$</u> on a :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j} + b_{i,j}| &\leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| + \sum_{j=1}^{n} |b_{i,j}| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| + \max_{1\leqslant i\leqslant n} \left(\sum_{j=1}^{n} |b_{i,j}|\right) \\ &\leqslant \underbrace{\max_{1\leqslant i\leqslant n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\right)}_{=\|A\|} + \underbrace{\max_{1\leqslant i\leqslant n} \left(\sum_{j=1}^{n} |b_{i,j}|\right)}_{\|B\|}\end{aligned}$$

   donc $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j} + b_{i,j}|\right) \leqslant \|A\| + \|B\|$ i.e. $\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$.

2. a) Soient $A = [a_{i,j}]$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X = (x_1,\dots,x_n)$ dans $\mathbb{R}^n$. On a alors :

$$AX = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1,j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{n,j}x_j\right)$$

   et ainsi $\|AX\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \left|\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right|$.
   Mais <u>pour tout i dans $\{1,\dots,n\}$</u> on a :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right| &\leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}x_j| = \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\,|x_j| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\,\|X\|_\infty = \|X\|_\infty \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \\ &\leqslant \|X\|_\infty \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| = \|X\|_\infty \|A\|\end{aligned}$$

   Il en résulte que $\|AX\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \left|\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right| \leqslant \|X\|_\infty \|A\|$ comme souhaité.

b) • Soit i_0 dans $\{1,\dots,n\}$ tel que $\|A\| = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}|$. On considère alors par exemple le vecteur $X_0 = (x_1,\dots,x_n)$ tel que pour j dans $\{1,\dots,n\}$ on ait :

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{i_0,j} \geqslant 0 \\ -1 & \text{si } a_{i_0,j} \geqslant 0 \end{cases}$$

de sorte que pour tout j dans $\{1,\dots,n\}$ on ait $a_{i_0,j}x_j = |a_{i_0,j}|$. On a ainsi $\|X_0\|_\infty = 1$ et :

$$AX_0 = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1,j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{n,j}x_j \right)$$

Mais pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$ on a $|a_{i,j}x_j| = |a_{i,j}|$ donc $\|AX_0\|_\infty = \|A\|$ ce qui implique :

$$\boxed{\|AX_0\|_\infty = \|A\| \ \|X_0\|_\infty}$$

• Pour tout X dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ on a $\|AX\|_\infty \leqslant \|A\| \ \|X\|_\infty$ donc $\|A\| \geqslant \dfrac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}$ et ainsi on a correctement :

$$\|A\| \geqslant \sup_{X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}$$

Mais on vient de voir qu'il existe X_0 dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $\|AX_0\|_\infty = \|A\| \ \|X_0\|_\infty$ i.e. $\|A\| = \dfrac{\|AX_0\|_\infty}{\|X_0\|_\infty}$ donc on a bien :

$$\boxed{\|A\| = \sup_{X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}}$$

c) Soient $A = [a_{i,j}]$ et $B = [b_{i,j}]$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $C = AB = [c_{i,j}]$. Pour tout (i,j) dans $\{1,\dots,n\}^2$ on a :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$$

donc pour tout i dans $\{1,\dots,n\}$ on a :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} |c_{i,j}| &= \sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j} \right| \leqslant \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| \, |b_{k,j}| = \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| \sum_{j=1}^{n} |b_{k,j}| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| \max_{1\leqslant k\leqslant n} \left(\sum_{j=1}^{n} |b_{k,j}| \right) = \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| \, \|B\| = \|B\| \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| \\ &\leqslant \|B\| \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| = \|B\| \ \|A\| \end{aligned}$$

Il en résulte que $\|AB\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} |c_{i,j}| \right) \leqslant \|B\| \ \|A\|$.

3. L'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ étant de dimension finie, les normes y sont équivalentes et la convergences de suites dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et équivalent à la convergence « coefficients par coefficients ».

Notons $A = [a_{i,j}]$, $B = [b_{i,j}]$ et $AB = [c_{i,j}]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note aussi :

$$A_m = [a_{i,j}(m)], \ B_m = [b_{i,j}(m)], \ A_mB_m = [c_{i,j}(m)].$$

Soit $(i,j) \in \{1,\dots,n\}$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$ on a : $c_{i,j}(m) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}(m)b_{k,j}(m)$. Mais, si $k \in \{1,\dots,n\}$, on a $a_{i,k}(m) \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} a_{i,k}$ et $b_{k,j}(m) \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} b_{k,j}$. Par somme, on obtient :

$$c_{i,j}(m) \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j} = c_{i,j}.$$

Il en résulte que la suite de matrices $(A_nB_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers la matrice AB.

4. a) On obtient de suite par récurrence $\|A^m\| \leqslant \|A\|^m$ et ainsi, puisque $\|A\| < 1$, il vient par sandwich

$$\exists \lim_{m\to+\infty} \|A\|^m = 0.$$

b) • Si λ est une valeur propre de A alors on dispose de X vecteur non nul dans $\mathbb{R}^n$ tel que $AX = \lambda X$. Or $\|AX\|_\infty = \|\lambda X\|_\infty = |\lambda| \|X\|_\infty$ et on a vu que $\|AX\|_\infty \leqslant \|A\| \|X\|_\infty$ donc il vient :

$$\lambda \|X\|_\infty \leqslant \underbrace{\|A\|}_{<1} \|X\|_\infty < \|X\|_\infty$$

et comme $\|X\|_\infty > 0$ il reste $\boxed{|\lambda| < 1}$.

• Ainsi -1 et 1 ne sont pas valeurs propres de A ce qui signifie exactement que les matrices $I - A$ et $I + A$ sont inversibles.

c) Si m est un entier naturel on a $(I - A)\left(\sum_{k=0}^{m} A^k\right) = I - A^{m+1}$ et on sait que $(I - A)$ est inversible donc il vient : $\sum_{k=0}^{m} A^k = (I - A^{m+1})(I - A)^{-1}$.

Mais $A^{m+1} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $(I - A^{m+1})(I - A)^{-1} \underset{+\infty}{\longrightarrow} (I - A)^{-1}$ et ainsi : la suite $\left(\sum_{k=0}^{m} A^k\right)$ converge vers $(I - A)^{-1}$.

NB. Pour $n = 1$ on doit retrouver le résultat bien connu des séries géométriques...