Devoir n° 3

Pour le jeudi 15 octobre 2026

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*La **présentation** de la copie doit être correcte, les résultats mis en valeur et les feuilles numérotées.*
Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. La clarté, la précision et la concision de la rédaction entrent dans une part importante de l'évaluation.
Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun.

Exercice 1

1. Soit $K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x-1| + |y+2| \leqslant 4\right\}$. Démontrer que K est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$.
   Pourquoi est-il inutile de préciser la norme choisie sur $\mathbb{R}^2$?
2. Sur $E = C^1([0,1],\mathbb{R})$ on pose : $\|f\| = |f(0)| + \displaystyle\int_0^1 |f'(t)|\ \mathrm{d}t$.
   a) Montrer que $\|\ \|$ est une norme sur E.
   b) Déterminer $A > 0$ tel que $\|\ \|_\infty \leqslant A\,\|\ \|$.
   c) Les normes $\|\ \|_\infty$ et $\|\ \|$ sont-elles équivalentes ?
   d) Pour f dans E on pose $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\ \mathrm{d}t$ et on admet que $\|\ \|_1$ est une norme sur E.
   Les normes $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_\infty$ sont-elles équivalentes ?
3. Soit $n \geqslant 1$ entier.
   a) On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente d'indice p, i.e. $A^p = 0$ et $A^{p-1} \neq 0$.
   Justifier qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $(X, AX, \ldots, A^{n-1}X)$ soit une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   b) Démontrer que l'ensemble $\mathcal{N}$ des matrice nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est exactement l'ensemble $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^n = 0\}$, puis montrer que $\mathcal{N}$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2

Soit E l'ensemble des suites à valeurs réelles qui convergent vers 0.

1. Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles.
2. Démontrer que si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de E alors la suite u est bornée.

   On pose, pour toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ *:* $\|u\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.

3. Prouver que $\|\ \|$ est une norme sur E.
4. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$. Démontrer que la série $\sum \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$ converge.
5. On pose, pour toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$: $f(u) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}$.
   a) Démontrer que f est une forme linéaire.
   b) Démontrer que f est continue sur E.

Exercice 3 - Une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Dans la suite n est un entier tel que $n \geqslant 2$. On notera I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $X = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on pose : $\|X\|_\infty = \sup\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$, ce qui définit une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Démontrer que l'application qui à toute matrice $A = [a_{i,j}]$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe le réel $\sup\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\right)$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que l'on notera $\|\ \|$ dans la suite.

2. a) Pour tout A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ établir que : $\|AX\|_\infty \leqslant \|A\| \, \|X\|_\infty$.
   b) Démontrer qu'il existe une vecteur $X_0 \neq 0$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que :

$$\|AX_0\|_\infty = \|A\| \, \|X_0\|_\infty$$

   En déduire que $\|A\| = \sup_{X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \dfrac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}$.
   c) Démontrer que pour tout couple (A, B) dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ on a :

$$\|AB\| \leqslant \|A\| \, \|B\|$$

3. Soient (A_m) et (B_m) deux suites dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui convergent respectivement vers A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que la suite $(A_m B_m)$ converge vers AB.
4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\|A\| < 1$.
   a) Déterminer $\lim_{m \to +\infty} A^m$.
   b) Démontrer que si λ est valeur propre de A alors $|\lambda| < 1$.
   Qu'en déduire pour les matrices $I - A$ et $I + A$?
   c) Démontrer que la suite $\left(\sum_{k=0}^{m} A^k \right)_{m \in \mathbb{N}}$ converge et exprimer sa limite en fonction de A.