Devoir n° 2, une correction

Problème - Formes linéaires sur un espace vectoriel de dimension finie

Préliminaire

1. D'après le résultat rappelé en préambule, on a $\dim E^* = \dim \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = \dim E \times \underbrace{\dim \mathbb{R}}_{=1} = \dim E$.

2. a) L'image $\operatorname{Im}\varphi$ de φ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ donc est de dimension 0 ou 1.
   — Si $\dim \operatorname{Im}\varphi = 0$ alors $\operatorname{Im}\varphi = \{0\}$ et donc φ est l'application nulle.
   — Sinon, $\operatorname{Im}\varphi \subset \mathbb{R}$ et $\dim \operatorname{Im}\varphi = 1 = \dim \mathbb{R}$, donc $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}$, ce qui signifie exactement que φ est surjective.

   Conclusion. φ est soit nulle, soit surjective.

   b) Le théorème du rang affirme que $\dim E = \dim \ker\varphi + \dim \operatorname{Im}\varphi$. Comme φ n'est pas l'application nulle, on a $\dim \operatorname{Im}\varphi = 1$ de sorte que $\dim \ker\varphi = n - 1$.

Partie I - Des exemples

3. **Premier exemple**

   a) Pour tout $P \in E$ on a $g(P) \in \mathbb{R}$ et l'application g est linéaire par linéarité de l'intégrale. Ainsi $g \in E^*$.

   b) Comme $g(1) = 1$, g n'est pas l'application nulle. Son noyau est un hyperplan de E, qui est de dimension $p+1$, donc de dimension p.

   c) Soit $k \in \{1, \dots, p\}$. On a :

$$g(Q_k) = \int_0^1 Q_k(t)\,\mathrm{d}t = \left\{\frac{x^{k+1}}{k+1} - \frac{x}{k+1}\right]_0^1 = 0.$$

   Ainsi $Q_k \in \ker g$.
   Comme les éléments de la famille $(Q_1, \dots, Q_p)$ sont de degrés tous différents, c'est une famille libre de p vecteurs de $\ker g$ qui est de dimension p : c'est donc une base de $\ker g$.

4. **Second exemple**

   a) Pour tout P, Q dans E et λ réel on a :
   — $f(P) = P(0) \in \mathbb{R}$;
   — $f(P + \lambda Q) = (P + \lambda Q)(0) = P(0) + \lambda Q(0) = f(P) + \lambda f(Q)$.
   Ainsi f est un élément de E^*.

   b) Pour P dans E, on a : $f(0) = 0 \Leftrightarrow P(0) = 0$. Ainsi $\ker f$ est l'ensemble des polynômes de E de terme constant nul, c'est à dire $\operatorname{vect}(X, X^2, \dots, X^p)$.

5. a) D'après la question 2b, on a $\dim \ker g = \dim \ker f = n - 1$. Comme $\ker f \subset \ker g$, il vient $\ker f = \ker g$.

   b) Comme $\ker f \neq E$, il existe un élément x_0 de E qui n'appartient pas au noyau de f.

   c) • Soit $x \in \ker f \cap \operatorname{vect}(x_0)$. Il existe alors $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda x_0$ et ainsi, puisque $x \in \ker f$:

$$0 = f(x) = \lambda \underbrace{f(x_0)}_{\neq 0}$$

   ce qui amène $\lambda = 0$ donc $x = 0$.
   On a donc $\ker f \cap \operatorname{vect}(x_0) = \{0_E\}$.

   • De plus $\dim \ker f + \dim \operatorname{vect}(x_0) = n - 1 + 1 = \dim E$, ce qui permet de conclure que $E = \ker f \oplus \operatorname{vect}(x_0)$.

d) On pose $h = g(x_0)f - f(x_0)g$. Démontrer que h est nulle.
Soit $x \in E$. On écrit $x = y + \lambda x_0$ selon la somme directe $E = \ker f \oplus \text{vect}(x_0)$. On a alors :

$$h(x) = g(x_0)\big(\underbrace{f(y)}_{=0} + \lambda f(x_0)\big) - f(x_0)\big(\underbrace{g(y)}_{=0} + \lambda g(x_0)\big) = 0$$

Ceci étant vrai quelque soit le choix de x dans E on a $h = 0$.

e) D'après la question précédente, comme $f(x_0) \neq 0$, il vient $g = \dfrac{f(x_0}{g(x_0)}g$: les formes linéaires f et g sont proportionnelles.

Partie II - Hyperplans et formes linéaires

6. Soit H un hyperplan de E et $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ une base de H. Comme la famille $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ est libre, on peut la compléter en une base de E : il existe un vecteur e_n dans E tel que $\beta = (e_1, \ldots, e_n)$ soit une base de l'espace vectoriel E.

   Une application linéaire étant entièrement déterminée par les images des éléments d'une base, on définit alors correctement une application linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}$ en posant :

$$\varphi(e_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   L'application φ est une forme linéaire non nulle, donc son noyau est de dimension $n-1$, et il contient de plus H, ce qui prouve que $H = \ker \varphi$.

7. Soit $x \in E$. On a les équivalences :

$$\begin{aligned} x \in \ker f &\Leftrightarrow \big(\forall i \in \{1, \ldots, p\}\big)\big(f_i(x) = 0\big) \\ &\Leftrightarrow \big(\forall i \in \{1, \ldots, p\}\big)\big(x \in \ker f_i\big) \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i=1}^{p} \ker f_i \end{aligned}$$

   On a donc bien : $\ker f = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{p} \ker f_i$.

8. a) Comme f est surjective, le vecteur ε_1 admet un antécédent x par f.

   b) Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ dans $\mathbb{R}$ tels que :

$$(\spadesuit) \quad \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f_i = 0 \quad \text{(égalité de fonctions).}$$

   Soit x un antécédent de ε_1 par f. On a alors $f(x) = (\underbrace{1}_{f_1(x)}, \underbrace{0}_{f_2(x)}, \ldots, \underbrace{0}_{=f_p(x)}) \in \mathbb{R}^p$ et en évaluant $(\spadesuit)$ en x il vient $\alpha_1 = 0$. En prenant successivement des antécédents de $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p$ par f on obtient de la même manière :

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 0.$$

   Ainsi la famille $(f_1, \ldots, f_p)$ est libre dans E^*.

9. a) Comme f n'est pas surjective, $\text{Im}\, f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$ qui est différent de $\mathbb{R}^p$ donc $m < p$.

   b) On complète une base $(e_1, \ldots, e_m)$ de $\text{Im}\, f$ en une base $(e_1, \ldots, e_p)$ de $\mathbb{R}^p$ et on pose :

$$H = \text{vect}(e_1, \ldots, e_{p-1}).$$

   Ainsi H est un hyperplan de $\mathbb{R}^p$ qui contient $\text{Im}\, f$.

c) D'après la question 6, on peut écrire $H = \ker \psi$ où ψ est une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}^p$. Mais, en regardant la matrice de ψ dans le couple des bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}$ (qui est une matrice ligne), il existe $a_1, \ldots, a_p$ dans $\mathbb{R}$ tel que pour tout $v = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ on ait :

$$\psi(v) = \sum_{i=1}^{p} a_i x_i.$$

Pour tout $x \in E$, comme $f(x) \in H = \ker \psi$, on a : $0 = \psi(f(x)) = \sum_{i=1}^{p} a_i f_i(x)$.

Ceci étant valable pour tout $x \in E$ on a l'égalité de fonctions $\sum_{i=1}^{p} a_i f_i = 0$ où les scalaires $a_1, \ldots, a_p$ **ne sont pas tous nuls**, puisque ψ est non nulle.

Conclusion. La famille $(f_1, \ldots, f_p)$ est liée dans E^*

10. a) Si f n'est pas surjective, d'après la question 9c, la famille $(f_1, \ldots, f_p)$ est liée dans E^*, ce qui est absurde : l'application linéaire f est surjective.

b) Comme f est surjective, en écrivant le théorème du rang, on obtient :

$$\dim E = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \ker f + p.$$

Ainsi, avec la question 7, il vient : $\dim \left(\bigcap_{i=1}^{p} \ker f_i \right) = \dim \ker f = \dim E - p = n - p.$

Partie III - Formes linéaires et structure euclidienne

11. a) Le produit scalaire étant linéaire de chacune de ses entrées, l(application f_a est linéaire et à valeurs dans $\mathbb{R}$: c'est une forme linéaire.

b) Le noyau de f_a est l'orthogonal du vecteur a.

c) Supposons que $f_a$soit l'application nulle. Pour tout x dans E on a donc $f_a(x) = 0$ et en particulier $f_a(a) = 0$ i.e. $\|a\|^2 = 0$ donc $a = 0_E$.

12. **Théorème de représentation des formes linéaires**

a) Soient a, b dans E et λ dans $\mathbb{R}$. Pour tout x dans E on a :

$$\begin{aligned} \Phi(a + \lambda b)(x) &= \langle a + \lambda b, x \rangle = \langle a, x \rangle + \lambda \langle b, x \rangle \\ &= \Phi(a)(x) + \lambda \Phi(b)(x) \end{aligned}$$

Ceci étant valable quelque soit le choix de x dans E, il vient : $\Phi(a + \lambda b) = \Phi(a) + \lambda \Phi(b)$.

b) • Soit $a \in \ker \Phi$. L'application f_a est alors nulle, donc $a = 0_E$ et ainsi $\ker \Phi = \{0_E\}$.

• L'application linéaire Φ est injective de E dans E^* qui sont des espaces vectoriels de même dimension : Φ est bijective (par le théorème du rang).

Conclusion. Φ est un isomorphisme de E sur E^*.

c) Comme Φ est une application bijective de E sur E^*, pour tout $\varphi \in E^*$ il existe un unique $a \in E$ tel que $\Phi(a) = \varphi$ et ainsi :

$$\forall x \in E,\ \varphi(x) = \langle a, x \rangle .$$

13. **Application aux formes linéaires sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$**

a) • Soient M et N dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On a :

$$(M \mid N) = \operatorname{tr}(M^\top N) = \operatorname{tr}({}^\top M^\top N)) = \operatorname{tr}(N^\top M) = (N \mid M).$$

• Fixons M dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Pour A et B dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et λ réel on a :

$$\begin{aligned} \langle M, A + \lambda B \rangle &= \operatorname{tr}(M^\top (A + \lambda B)) = \operatorname{tr}(M^\top A + \lambda M^\top B) \\ &= \operatorname{tr}(M^\top A) + \lambda \operatorname{tr}(M^\top B) \quad \text{(par linéarité de la trace)} \\ &= \langle M, A \rangle + \lambda \langle M, B \rangle \end{aligned}$$

• Puis si $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, en désignant par $(A)_{i,j}$ les coefficients d'une matrice A, on a :

$$\langle M, M\rangle \quad = \quad \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{p}(M^\top)_{i,k}(M)_{k,i}\right) = \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{p}(M)_{k,i}(M)_{k,i}\right) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{p}(M)_{k,i}^2 \geqslant 0$$

De plus, si $\langle M, M\rangle = 0$ alors pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,p\}^2$ on a $(M)_{k,i}^2 = 0$ donc $M = 0$.

Conclusion. $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

b) Soit $\varphi : \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une forme linéaire. D'après la question 12c, il existe une matrice B dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que pour toute matrice M dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ on ait :

$$\varphi(M) = \langle B, M\rangle = \mathrm{tr}(B^\top M).$$

On pose alors $A = B^\top$ pour obtenir le résultat.

Fin de la correction
