Devoir n° 2

Pour le lundi 28 septembre 2026

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*La **présentation** de la copie doit être correcte, les résultats mis en valeur et les feuilles numérotées.*
Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. La clarté, la précision et la concision de la rédaction entrent dans une part importante de l'évaluation.
Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun.

Problème - Formes linéaires sur un espace vectoriel de dimension finie

Dans tout le problème, n est un entier supérieur ou égal à 2 et E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie n.

Notations et définition

— On note 0_E le vecteur nul de E.
— Lorsque F est un espace vectoriel on note $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F.
— Une ***forme linéaire*** sur E est une application linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}$.
— On note, dans ce problème, $E^* = \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des formes linéaires sur E.

Préliminaire

1. Justifier que les espaces vectoriels E et E^* ont la même dimension.

2. Soit φ un élément de E^*.
   a) Démontrer que φ est soit nulle, soit surjective.
   b) On suppose que φ n'est pas l'application nulle. Démontrer que $\ker\varphi$ est un hyperplan de E.

Partie I - Des exemples

3. **Premier exemple**
   Dans cette question, p est un entier naturel non nul et E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}_p[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p.
   On considère l'application $g : E \to \mathbb{R}$ définie par : $g(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$.
   a) Démontrer que g est un élément de E^*.
   b) Quelle est la dimension du noyau de g ?
   c) Pour $k \in \{1,\dots,p\}$ on considère le polynôme $Q_k : X^k - \dfrac{1}{k+1}$.
   Démontrer que la famille $(Q_1,\dots,Q_p)$ est une base du noyau de g.

4. **Second exemple**
   Dans cette question, p est un entier naturel non nul et E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}_p[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p.
   On considère l'application $f : E \to \mathbb{R}$ définie par : $f(P) = P(0)$.
   a) Démontrer que f est un élément de E^*.
   b) Déterminer le noyau de f.

5. Dans cette question, on revient au cadre général.
   Soient f et g deux éléments de E^*, non nuls, tels que $\ker f \subset \ker g$.
   a) Démontrer que $\ker f = \ker g$.
   b) Justifier de l'existence d'un élément x_0 de E qui n'appartient pas au noyau de f.

c) Démontrer que $E = \ker f \oplus \text{vect}(x_0)$, où $\text{vect}(x_0)$ désigne le sous-espace vectoriel de E engendré par le vecteur x_0.
d) On pose $h = g(x_0)f - f(x_0)g$. Démontrer que h est nulle.
e) Que peut-on en conclure pour les formes linéaires f et g ?

Partie II - Hyperplans et formes linéaires

6. On a vu à la question 2b que le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan. Démontrer la réciproque, c'est à dire que ***tout hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle.***

Dans la suite de cette partie, on considère un entier $p \geqslant 2$ et une famille $(f_1, \ldots, f_p)$ de formes linéaires sur E, ainsi que l'application :

$$f = \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ x & \mapsto & (f_1(x), \ldots, f_p(x)) \end{pmatrix}.$$

On tiendra pour acquis que l'application f est linéaire.

7. Démontrer que : $\ker f = \bigcap_{i=1}^{p} \ker f_i$.

8. On suppose dans cette question que l'application f est surjective.
   a) On note $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$. Justifier que ε_1 admet un antécédent x par f.
   b) Démontrer que la famille $(f_1, \ldots, f_p)$ est libre dans E^*.

9. On suppose dans cette question que l'application f n'est pas surjective.
   a) Que peut-on dire de la dimension m de $\text{Im } f$?
   b) En complétant une base $(e_1, \ldots, e_m)$ de $\text{Im } f$ en une base de $\mathbb{R}^p$, démontrer que $\text{Im } f$ est inclus dans un hyperplan H de $\mathbb{R}^p$.
   c) En déduire que la famille $(f_1, \ldots, f_p)$ est liée dans E^* (on pourra utiliser la question 6).

10. On suppose dans cette question que la famille $(f_1, \ldots, f_p)$ est libre dans l'espace vectoriel E^*.
    a) Justifier que f est surjective.
    b) Démontrer que : $\dim\left(\bigcap_{i=1}^{p} \ker f_i\right) = n - p$.

Partie III - Formes linéaires et structure euclidienne

Dans cette partie, l'espace vectoriel E est muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$.
Pour $a \in E$ on note f_a l'application qui à un élément x dans E associe le réel $f_a(x) = \langle a, x\rangle$.

11. Soit $a \in E$.
    a) Démontrer que f_a est un élément de E^*.
    b) Déterminer le noyau de f_a.
    c) Démontrer que si f_a est l'application nulle alors $a = 0_E$.

12. **Théorème de représentation des formes linéaires**
    On considère maintenant l'application $\Phi : E \to E^*$ définie, pour $a \in E$, par : $\Phi(a) = f_a$.
    a) Démontrer que Φ est linéaire.
    b) Démontrer que Φ est un isomorphisme de E sur E^*.
    c) Justifier que pour tout $\varphi \in E^*$ il existe un unique $a \in E$ tel que :

$$\forall x \in E,\ \varphi(x) = \langle a, x\rangle\,.$$

13. **Application aux formes linéaires sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$**
    Dans cette question, p est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on considère $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices carrées de taille p.
    a) Démontrer que $\langle\ ,\ \rangle : (A, B) \mapsto \text{tr}(A^\top B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
    b) Démontrer que si $\varphi : \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire alors il existe une matrice A dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que pour toute matrice M dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ on ait :

$$\varphi(M) = \text{tr}(AM).$$