Devoir n° 1, une correction

Exercice 1

1. • Montrons que f est surjective. Soit $y \in Y$. On a alors $y = f \circ g(y) = f[g(y))]$: y est l'image par f de $g(y)$. L'application f est bien surjective.

   • Montrons que g est injective. Soient y_1 et y_2 dans Y tels que $g(y_1) = g(y_2)$. On a alors $f[g(y_1)] = f[g(y_2)]$, donc $y_1 = y_2$ puisque $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$. Ainsi g est injective.

2. Montrons que f est bijective. Comme $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$, d'après la question précédente, f est surjective. Comme $g \circ f = \mathrm{Id}_X$, toujours d'après la question précédente, f est injective. Ainsi f est bijective.

   • On a $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$ donc $\underbrace{f^{-1} \circ f}_{=\mathrm{Id}_X} \circ g = f^{-1}$. Ainsi $f^{-1} = g$.

Exercice 2

1. On a :

$$AM - MB = \begin{pmatrix} a_1m_{1,1} & a_1m_{1,2} & \cdots & a_1m_{1,n} \\ a_2m_{2,1} & a_2m_{2,2} & \cdots & a_2m_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nm_{n,1} & a_nm_{2,1} & \cdots & a_nm_{n,n} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m_{1,1}b_1 & m_{1,2}b_2 & \cdots & m_{1,n}b_n \\ m_{2,1}b_1 & m_{2,2}b_2 & \cdots & m_{2,n}b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1}b_1 & m_{2,1}b_2 & \cdots & m_{n,n}b_n \end{pmatrix}$$

   Ainsi $(*)$ est équivalent à :

$$\big(\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2\big)\big((a_i - b_j)m_{i,j} = c_{i,j}\big).$$

2. $(*)$ admet dans ce cas une unique solution : la matrice M dont les coefficients sont donnés par $m_{i,j} = \dfrac{c_{i,j}}{a_i - b_j}$.

3. En prenant C telle que $c_{r,s} \neq 0$ l'équation $(*)$ n'admet pas de solution.

Exercice 3 (Valeurs propres d'une matrice)

1. **Une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul**. Ainsi, pour $\lambda \in \mathbb{K}$, la matrice $M - \lambda I$ est singulière si et seulement si son déterminant est nul, ce qui justifie que : « *les valeurs propres de M sont exactement les valeurs de λ qui annulent ce déterminant* ».

2. a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On a : $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 4-\lambda & -3 & 9 \\ 6 & -5-\lambda & 9 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix}$. Ainsi, en développant par rapport à la dernière ligne, on a :

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (-2-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 6 & -5-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-2-\lambda)\,[(4-\lambda)(-5-\lambda) + 18] \\ &= (-2-\lambda)\underbrace{(\lambda^2 + \lambda - 2)}_{=(\lambda-1)(\lambda+2)} \\ &= -(\lambda+2)^2(\lambda-1) \end{aligned}$$

   Les valeurs propres de A sont donc -2 et 1.

b) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On a $A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix}$ donc $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 1$.

La matrice A n'a pas de valeur propre réelle mais admet deux valeurs propres complexes qui sont $-i$ et i.

c) On remarque de suite que $A - I$ est de rang 1 donc 1 est valeur propre. **On verra par la suite comment exploiter cela sans aucun calcul**.

Soit λ dans $\mathbb{C}$. On a $A_\lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$. En remplaçant la première colonne par la somme de toutes les colonnes il vient :

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 \\ 4-\lambda & 2-\lambda & 1 \\ 4-\lambda & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}.$$

Un développement par rapport à la première colonne donne alors :

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (4-\lambda) \left(\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2-\lambda & 1 \end{vmatrix} \right) \\ &= (4-\lambda) \left((2-\lambda)^2 - 1 - 2 + \lambda + 1 + 1 + \lambda - 2 \right) \\ &= (4-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = (4-\lambda)(\lambda - 1)^2 \end{aligned}$$

Conclusion. Les valeurs propres de A sont 1 et 4.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On a $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ et ainsi :

$$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^2 + 1 = (1-\lambda)^2 - i^2 = (1 - i - \lambda)(1 + i - \lambda)$$

Conclusion. Les valeurs propres complexes de A sont $1 - i$ et $1 + i$.