Devoir n° 1

Pour le mardi 8 septembre 2026

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*La **présentation** de la copie doit être correcte, les résultats mis en valeur et les feuilles numérotées. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. La clarté, la précision et la concision de la rédaction entrent dans une part importante de l'évaluation.*

Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun.

Exercice 1

Soient X et Y deux ensembles, $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$.

1. On suppose que $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$. Démontrer que f est surjective et que g est injective.
2. On suppose que $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_X$. Démontrer que f est bijective. Quelle est la réciproque de f dans ce cas ?

Exercice 2

Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_n \end{pmatrix}$$

On s'intéresse dans cet exercice à l'équation d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$(*) \quad AM - MB = C.$$

1. Exprimer l'équation $(*)$ à l'aide des coefficients $m_{i,j}$ et $c_{i,j}$ des matrices M et C.
2. On suppose que les ensembles $\{a_1, \ldots, a_n\}$ et $\{b_1, \ldots, b_n\}$ sont disjoints. Quel est le nombre de solutions de $(*)$?
3. On suppose dans cette question qu'il existe $(r, s) \in \{1, \ldots, n\}^2$ tel que $a_r = b_s$. Trouver une matrice C telle que l'équation $(*)$ n'ait pas de solution.

Exercice 3 (Valeurs propres d'une matrice)

Dans cet exercice, la lettre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $n \geqslant 1$ un entier. La lettre I désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soient M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ *est valeur propre de* M *dans* $\mathbb{K}$ lorsque la matrice $M - \lambda I$ n'est pas inversible.

Une manière de déterminer les valeurs propres d'une matrice M est la suivante : on calcule pour $\lambda \in \mathbb{K}$ le déterminant $\det(\lambda I - M)$ et alors « *les valeurs propres de* M *sont exactement les valeurs de* λ *qui annulent ce déterminant* ».

1. Pouvez-vous expliquer la phrase en italique ci-dessus ?
2. Déterminer les valeurs propres dans $\mathbb{R}$ des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 9 \\ 6 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Déterminer les valeurs propres dans $\mathbb{C}$ de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.