

# Un problème sur les séries trigonométriques

Le lundi 23 janvier 2022

Il est utile en physique, notamment pour étudier des spectres d'énergie ou pour décomposer un signal périodique en harmoniques, de pouvoir écrire une fonction périodique en somme d'une série de fonctions trigonométriques.

Nous allons nous intéresser à l'aspect mathématique de cette décomposition pour les fonctions de période  $2\pi$ .

Dans ce qui suit, on appelle « série trigonométrique » une série de fonctions du type

$$\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

où  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont deux suites de réels.

Dans la première partie, on étudie quelques exemples. Dans la deuxième partie, on s'intéresse plus particulièrement aux séries trigonométriques qui convergent normalement sur  $\mathbb{R}$ .

On notera  $C_{2\pi}$  l'espace vectoriel des fonctions continues et  $2\pi$ -périodiques de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Pour  $f \in C_{2\pi}$  et  $n \in \mathbb{N}$ , on notera

$$\alpha_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{et} \quad \beta_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

## Partie 1 : exemples

- Démontrer que la série trigonométrique  $\sum \left( \frac{1}{2^n} \cos(nx) + \frac{1}{3^n} \sin(nx) \right)$  converge normalement sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout entier  $p \geq 2$ , déterminer la somme de la série  $\sum_{n \geq 0} \left( \frac{e^{ix}}{p} \right)^n$  puis en déduire la valeur de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{2^n} \cos(nx) + \frac{1}{3^n} \sin(nx) \right)$$

(il n'est pas utile de réduire au même dénominateur).

- On admet que pour tout  $z$  complexe on a :  $e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$ .  
Pour  $x$  réel, quelle est la partie réelle de  $\exp(e^{ix})$ ?  
En déduire l'écriture de la fonction  $\varphi : x \mapsto \exp(\cos(x)) \cos(\sin(x))$  comme la somme d'une série trigonométrique.
- Donner un exemple de suite  $(a_n)$  de limite nulle telle que la série trigonométrique  $\sum a_n \cos(nx)$  ne converge pas simplement sur  $\mathbb{R}$ .
- On admet que la série trigonométrique  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(nx)$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$ . Converge-t-elle normalement sur  $\mathbb{R}$ ?

## Partie 2 : propriétés

### Une condition suffisante

- Démontrer que si les séries  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$  sont absolument convergentes, alors la série trigonométrique  $\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$  converge normalement sur  $\mathbb{R}$ .

### Une condition nécessaire

- Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  quelconques. Démontrer que le maximum de la fonction  $x \mapsto |a \cos(x) + b \sin(x)|$  est  $\sqrt{a^2 + b^2}$ .
- Démontrer que si la série trigonométrique  $\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$  converge normalement sur  $\mathbb{R}$ , alors les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  convergent vers 0 et les séries  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$  sont absolument convergentes.

### Autres propriétés

8. On note  $f$  la somme d'une série trigonométrique  $\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$  qui converge normalement sur  $\mathbb{R}$ . Justifier que  $f \in C_{2\pi}$ .
9. Calculer  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx$  pour  $n \neq 0$  et donner la valeur de  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cos(nx) dx$  pour  $k$  et  $n$  entiers.
10. On note  $f$  la somme d'une série trigonométrique  $\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$  qui converge normalement sur  $\mathbb{R}$  : pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ . Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $\alpha_n(f) = a_n$  puis exprimer  $\alpha_0(f)$  en fonction de  $a_0$ . On pourra utiliser sans démonstration que pour  $k \neq n$ ,  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(nx) dx = 0$ .

On admettra, pour la suite du problème, que pour tout entier naturel  $n$  non nul  $\beta_n(f) = b_n$  et  $\beta_0(f) = 0$  (la démonstration n'est pas demandée).

11. Soit  $f \in C_{2\pi}$ . Pour tout réel  $x$ , on pose  $u_0(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2}$ . Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose  $u_n(x) = \alpha_n(f) \cos(nx) + \beta_n(f) \sin(nx)$ . On suppose ici que la série trigonométrique  $\sum (u_n(x))$  converge normalement sur  $\mathbb{R}$  vers une fonction notée  $g$  :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (\alpha_k(f) \cos(kx) + \beta_k(f) \sin(kx))$$

Quelles relations a-t-on dans ce cas entre  $\alpha_n(g)$  et  $\alpha_n(f)$  ?  $\beta_n(g)$  et  $\beta_n(f)$  ?

12. Il est admis que si une fonction  $h \in C_{2\pi}$  vérifie : pour tout entier naturel  $n$ ,  $\alpha_n(h) = \beta_n(h) = 0$ , alors  $h$  est la fonction nulle. Démontrer que pour tout réel  $x$ ,  $g(x) = f(x)$ .

En résumé, lorsque la série trigonométrique  $\sum (\alpha_n(f) \cos(nx) + \beta_n(f) \sin(nx))$  d'une fonction  $f \in C_{2\pi}$  converge normalement que  $\mathbb{R}$  alors pour tout réel  $x$ , on a

$$f(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n(f) \cos(nx) + \beta_n(f) \sin(nx))$$

13. Si  $f \in C_{2\pi}$  est une fonction paire, que vaut  $\beta_n(f)$  ? Exprimer, sans démonstration,  $\alpha_n(f)$  en fonction de l'intégrale  $\int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$ .
14. **Exemple.** Soit  $f \in C_{2\pi}$  définie ainsi : pour tout  $x \in [-\pi, \pi]$ ,  $f(x) = x^2$  et  $f$  est  $2\pi$ -périodique sur  $\mathbb{R}$ .
- a) Construire la courbe de cette fonction paire  $f$  sur l'intervalle  $[-3\pi, 3\pi]$  puis déterminer, pour tout entier naturel, les coefficients  $\alpha_n(f)$  et  $\beta_n(f)$ .
- b) Donner une série trigonométrique qui converge normalement sur  $\mathbb{R}$  vers  $f$ .
- c) En déduire les sommes  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$  et  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ . Déduire alors de la seconde somme la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

15. **Application.** Justifier que la fonction  $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$  est intégrable sur l'intervalle  $]0, 1[$  puis démontrer que  $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \frac{\pi^2}{12}$ .
16. a) La somme d'une série trigonométrique qui converge normalement sur  $\mathbb{R}$  est-elle nécessairement une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  ?
- b) Proposer une condition suffisante sur les séries  $\sum na_n$  et  $\sum nb_n$  pour que la somme de la série trigonométrique  $\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ , qui converge normalement sur  $\mathbb{R}$  soit une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
17. Déterminer la somme de la série trigonométrique  $\sum \frac{n}{3^n} \cos(nx)$ .