Similitudes d'un espace euclidien

Partie I - Exemples, propriétés

1. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ -2x+y \end{pmatrix}$ donc $u(x,y) = (x+2y, -2x+y)$, ce qui amène :

$$\begin{cases} \|(x,y)\|^2 & = x^2+y^2 \\ \|u(x,y)\|^2 & = (x+2y)^2 + (-2x+y)^2 = 5(x^2+y^2) \end{cases}.$$

   Ainsi u est une similitude de rapport $\sqrt{5}$.

2. a) Comme $u \in \mathrm{Sim}(E)$, il existe $k > 0$ tel que : $\forall x \in 2,\ \|u(x)\| = k\|x\|$.

   • Soit $x \in \ker u$. On a alors $k\|x\| = \|u(x)\| = 0$. Comme $k > 0$ il vient $\|x\| = 0$ et donc $x = 0$. Il en résulte que $\ker u = \{0\}$ donc u est injectif, donc bijectif puisque c'est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

   • Soit $y \in E$. Il existe alors x dans E tel que $y = u(x)$ et il vient : $\left\|u^{-1}(y)\right\| = \|x\| = \dfrac{1}{k}\|y\|$.

   Cette dernière égalité étant valable pour tout $y \in E$, il vient $u^{-1} \in \mathrm{Sim}(E)$ et son rapport est $\dfrac{1}{k}$.

   b) On suppose que u est de rapport k_u et v de rapport k_v. Alors $u \circ v$ est linéaire et pour tout x dans E on a :

$$\|u \circ v(x)\| = k_u\|v(x)\| = k_u k_v\|x\|.$$

   Ainsi $u \circ v$ est une similitude de rapport $k_u k_v$.

3. • Supposons que u soit une similitude de rapport k. Alors $v = \dfrac{1}{k}u$ est un endomorphisme orthogonale et sa matrice $B = \dfrac{1}{k}A$ dans la base orthonormée $\mathcal{B}$ est orthogonale. On a donc $B^\top B = I_n$ ce qui se traduit immédiatement par $A^\top A = k^2 I_n$.

   • Supposons que $A^\top A = k^2 I_n$. Soit x dans E et X la colonne des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$. L'expression du produit scalaire en base orthonormée permet d'écrire :

$$\|u(x)\|^2 = (AX)^\top AX = X^\top A^\top AX = k^2 X^\top X = k^2\|x\|^2.$$

   Ainsi u est une similitude de rapport k.

   Conclusion. L'endomorphisme u est une similitude de rapport k si et seulement si $A^\top A = k^2 I_n$

4. **Un exemple**.

   a) On trouve $A^\top A = 9I_3$. Selon la question 3, u est une similitude de rapport 3.

   b) On a $A^\top A = 9I_3$ donc $A^\top = 9A^{-1}$ et $A^{-1} = \dfrac{1}{9}A^\top$.

5. Pour tout $x \in E$, comme u^{-1} est une similitude de rapport $\dfrac{1}{3}$ (2a) on a :

$$\left\|u^{-1} \circ f \circ u(x)\right\| \quad = \quad \frac{1}{3}\|f \circ u(x)\| \underbrace{=}_{f \in O(E)} \frac{1}{3}\|u(x)\| = \|x\|.$$

   Comme $u^{-1} \circ f \circ u$ est linéaire, $u^{-1} \circ f \circ u \in \mathrm{O}(E)$.

6. Soit $x \in E$, non nul. Alors $y = \dfrac{x}{\|x\|}$ appartient à la sphère unité de E. Mais par hypothèse, il existe un réel $r > 0$ tel que l'image de la sphère unité de E soit une sphère de centre 0 et de rayon r. Ainsi $\|u(y)\| = r$ et il vient :

$$\|u(x)\| = r\|x\|.$$

   Ainsi u est une similitude de rapport r.

Partie II - Assertions équivalentes

7. • On suppose que u est une similitude de rapport k. Alors $v = \dfrac{1}{k}u$ est un endomorphisme orthogonal et $u = (k\mathrm{Id}_E) \circ v$.

   • Réciproquement, supposons que $u = (k\mathrm{Id}_E) \circ v$ où $k > 0$ et $v \in \mathrm{O}(E)$. Pour tout $x \in E$ on a alors :
$$\|u(x)\| = \|kv(x)\| = k\,\|v(x)\| = k\,\|x\|\,,$$
   donc u est une similitude de rapport k.

   Conclusion. u est un similitude si et seulement si u est la composée d'une homothétie non nulle et d'un endomorphisme orthogonal.

8. a) Soient $(x,y) \in E^2$. On a :
$$\begin{cases} \|x+y\|^2 & = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \\ \|x-y\|^2 & = \|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \end{cases}$$
   Par soustraction il vient : $\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$.

   b) • Supposons que pour tout $(x,y) \in E^2$ on ait $\langle u(x),u(y)\rangle = k^2\langle x,y\rangle$.. Pour tout x dans E, en prenant $y = x$ on a donc $\|u(x)\|^2 = k^2\|x\|^2$ donc u est une similitude de rapport k.

   • Réciproquement supposons que u soit une similitude de rapport k. Pour tout $(x,y) \in E^2$ on a :
$$\begin{aligned} \langle u(x),u(y)\rangle &= \frac{1}{4}\left(\|u(x)+u(y)\|^2 - \|u(x)+u(y)\|^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\|u(x+y)\|^2 - \|u(x+y)\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(k^2\|x+y\|^2 - k^2\|x+y\|^2\right) \\ &= k^2\langle x,y\rangle \end{aligned}$$
   Conclusion. u est une similitude de rapport k si et seulement si pour tout $(x,y) \in E^2$ on a :
$$\langle u(x),u(y)\rangle = k^2\langle x,y\rangle\,.$$

9. Découle immédiatement de la question précédente.

10. a) Soit $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$.
    — On a : $\langle e_i+e_j, e_i-e_j\rangle = \underbrace{\|e_i\|^2}_{=1} - \langle e_i,e_j\rangle + \langle e_j,e_i\rangle - \underbrace{\|e_j\|^2}_{=1} = 0$.
    — D'après le point précédent, comme u préserve l'orthogonalité : $\langle u(e_i)+u(e_j), u(e_i)-u(e_j)\rangle = 0$..
    Mais on a $\langle u(e_i)+u(e_j), u(e_i)-u(e_j)\rangle = \|u(e_i)\|^2 - \|u(e_j)\|^2$, ce qui permet de dire que : $\|u(e_i)\| = \|u(e_j)\|$.

    b) Pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$ on a $\|e_i\| = 1$ et $\|u(e_i)\| = k$ donc $\|u(e_i)\| = k\,\|e_i\|$.

    c) Soit $x \in E$. On écrit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ de sorte que $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ (on travaille en base orthonormée !).
    Comme u préserve l'orthogonalité la famille $(u(e_i))_{1\leqslant i\leqslant n}$ est orthogonale et la famille $(x_i u(e_i))_{1\leqslant i\leqslant n}$ aussi. Par le théorème de Pythagore, il vient :
$$\|f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\|x_i u(e_i)\|^2 = \sum_{i=1} x_i^2\,\|u(e_i)\|^2 = k^2\sum_{i=1} x_i^2 = k^2\,\|x\|^2$$
    Ainsi u est une similitude de rapport k.

11. • Soient $(x,y) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons $\delta = \|u(x+\lambda y) - (u(x)+u(\lambda y))\|$. On a :
$$\begin{aligned} \delta^2 &= \|u(x+\lambda y)\|^2 - 2\langle u(x+\lambda y), u(x)+u(\lambda y)\rangle + \|u(x)+u(\lambda y)\|^2 \\ &= k^2\|x+\lambda y\|^2 - 2\langle u(x+\lambda y),u(x)\rangle - 2\lambda\langle u(x+\lambda y),u(y)\rangle + \|u(x)\|^2 + 2\lambda\langle u(x),u(y)\rangle + \|u(\lambda y)\|^2 \\ &= k^2\|x\|^2 + 2\lambda k^2\langle x,y\rangle + k^2\lambda^2\|y\|^2 - 2k^2\langle x+\lambda y,x\rangle - 2k^2\lambda\langle x+\lambda y,y\rangle + k^2\|x\|^2 + 2\lambda k^2\langle x,y\rangle + k^2\|\lambda y\|^2 \\ &= \ldots = 0 \end{aligned}$$
    Ainsi $u(x+\lambda y) - (u(x)+u(\lambda y)) = 0$ ce qui prouve que u est linéaire.

    • Comme u est linéaire, d'après la question 8b (ou la question 10c), u est une similitude de rapport k.