Similitudes d'un espace euclidien

Dans ce problème, E est un espace vectoriel euclidien muni d'un produit scalaire que l'on notera $\langle\ ,\ \rangle$ de norme associée $\|\ \|$.
On notera Id_E l'application identité de E.
Lorsque $n \geqslant 1$ est un entier, on notera I_n ma matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Tous les espaces vectoriels $\mathbb{R}^p$ rencontrés dans l'exercice sont munis de leur produit scalaire canonique.

Une définition. Soit k un réel strictement positif. Un endomorphisme u de E est **une similitude de rapport** k de E lorsque pour tout vecteur x de E, on a :

$$\|u(x)\| = k\|x\|.$$

On notera $\mathrm{Sim}(E)$, l'ensemble des similitudes de $E, \mathrm{O}(E)$ désigne l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E.

L'objectif de cet exercice est d'étudier certaine propriétés des similitudes d'un espace euclidien.

Partie I - Exemples, propriétés

1. Démontrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ est, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, la matrice d'une similitude u dont on précisera le rapport.
2. Soient u et v dans $\mathrm{Sim}(E)$.
   a) Démontrer que u est bijectif et que : $u^{-1} \in \mathrm{Sim}(E)$.
   b) Démontrer que : $u \circ v \in \mathrm{Sim}(E)$.
3. Soient $k > 0$, u un endomorphisme de E et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. On note A la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.
   Démontrer que u est une similitude de rapport k si et seulement si $A^\top A = k^2 I_n$.
4. **Un exemple**.
   On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ ainsi que u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.
   a) Démontrer que u est une similitude dont on donnera le rapport.
   b) Donner la matrice de la similitude u^{-1}.
5. Vérifier que, pour tout élément f de O et tout élément u de $\mathrm{Sim}(E)$ on a : $u^{-1} \circ f \circ u \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^3)$.
6. On appelle sphère de centre 0 et de rayon $r > 0$, l'ensemble des vecteurs x de E tels que $\|x\| = r$.
   On suppose que u est un endomorphisme de E tel que l'image par u de toute sphère de E de centre 0 est une sphère de E de centre 0.
   Démontrer que u est une similitude de E.
   On pourra remarquer que pour y vecteur non nul, $\left\| \dfrac{y}{\|y\|} \right\| = 1.$

Partie II - Assertions équivalentes

7. Soit u un endomorphisme de E. On rappelle qu'une homothétie vectorielle de E est une application de la forme $\alpha \mathrm{Id}_E$.

   Démontrer que $u \in \mathrm{Sim}(E)$ si et seulement si u est la composée d'une homothétie vectorielle non nulle de E et d'un élément de $O(E)$

8. Soit u un endomorphisme de E.

   a) Démontrer que : $\forall (x,y) \in E^2,\ \langle x, y\rangle = \dfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$

   b) En déduire que u est une similitude de rapport k si et seulement si

   $$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle u(x), u(y)\rangle = k^2 \langle x, y\rangle$$

9. Soit u une similitude de rapport k de E. Démontrer que pour tout couple (x, y) de vecteurs de E

   $$\langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow \langle u(x), u(y)\rangle = 0$$

   On dit que l'endomorphisme u conserve l'orthogonalité.

10. On veut démontrer dans cette question la réciproque de la question 9. On suppose que u est un endomorphisme de E conservant l'orthogonalité. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.

    a) Démontrer que : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \langle e_i + e_j, e_i - e_j\rangle = 0$, puis que :

    $$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \|u(e_i)\| = \|u(e_j)\|.$$

    b) On note k la valeur commune prise par tous les $\|u(e_i)\|$ pour $i \in [\![1,n]\!]$.
    Justifier que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a : $\|u(e_i)\| = k\,\|e_i\|$.

    c) Conclure.

11. Soit u une application de E dans E (non supposée linéaire) telle qu'il existe un réel $k > 0$ pour lequel :

    $$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle u(x), u(y)\rangle = k^2 \langle x, y\rangle$$

    Démontrer que u est un endomorphisme de E, puis que u est une similitude de E.