# Endomorphismes de rang 1, niveau CCP. Une correction

## Partie I : Un exemple

Dans ce corrigé, qui n'est pas de moi, on note $\mathrm{SEP}(M,\lambda)$ (respectivement $\mathrm{SEP}(\varphi,\lambda)$) le sous-espace propre de la matrice $M$ (respectivement de l'endomorphisme $\varphi$) associé à la valeur propre $\lambda$.

D'autre part, on confondra l'espace $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$.

1. *Première méthode.*
   Soit $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, défini par
   **Conclusion.** $\forall X, Y \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}), \langle X, Y\rangle = {}^tXY$.
   On a immédiatement :
   **Conclusion.** $\dim(\mathrm{vect}(V_0))^\perp = 4-1 = 3$ et $\forall W \in (\mathrm{vect}(V_0))^\perp, \quad A_0W = A_0{}^tV_0W = A_0\langle V_0, W\rangle = 0$,
   ce qui prouve que 0 est valeur propre de $A_0$ et $(\mathrm{vect}(V_0))^\perp \subset \mathrm{SEP}(A_0, 0)$, et donc que $\dim(\mathrm{SEP}(A_0, 0)) \geqslant 3$.
   Comme $\dim(\mathrm{SEP}(A_0, 0)) = 4-\mathrm{rg}(A_0) \leqslant 3$ puisque $A_0$ n'est pas nulle, on a exactement $\mathrm{SEP}(A_0, 0) = (\mathrm{vect}(V_0))^\perp$.
   $$(\mathrm{vect}(V_0))^\perp = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) / \left\langle \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}, V_0\right\rangle\right\} = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) / x-y+2z-t=0\right\}$$
   $$(\mathrm{vect}(V_0))^\perp = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} / x = y-2z+t\right\} = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$
   $$\boxed{0 \text{ est une valeur propre de } A_0 \text{ et } \left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } \mathrm{SEP}(A_0,0).}$$
   *Seconde méthode.*
   Le calcul explicite de $A_0$ donne $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 6 & -3 \\ 4 & -4 & 8 & -4 \end{pmatrix}$.
   $A_0$ est manifestement de rang 1, donc 0 est une valeur propre de $A_0$ et $\dim(\mathrm{SEP}(A_0, 0)) = 3$.
   Enfin : $\forall \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}), \quad A_0\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x-y+2z-t = 0$. On obtient bien le même sous-espace propre que par la première méthode.
2. (a) Comme ${}^tV_0U_0 = 1$, on a : $\boxed{A_0U_0 = 1 \times U_0 ...}$
   (b) ... ce qui prouve que 1 est une valeur propre de $A_0$. Comme les sous-espaces propres sont en somme direccte, on a nécessairement : $\dim \mathrm{SEP}(A_0, 0)+\dim \mathrm{SEP}(A_0, 1) \leqslant 4$, donc $\dim \mathrm{SEP}(A_0, 1) \leqslant 1$. Donc $\dim \mathrm{SEP}(A_0, 1) = 1$ et $\dim \mathrm{SEP}(A_0, 0) + \dim \mathrm{SEP}(A_0, 1) = 4$.
   D'après le théorème de diagonalisabilité,
   $\boxed{A_0 \text{ est diagonalisable, } \mathrm{Spec}(A_0) = \{0;1\},\ \dim \mathrm{SEP}(A_0,0) = 3 \text{ et } \dim \mathrm{SEP}(A_0,1) = 1.}$
   (c) Le cours affirme qu'une matrice $P$ de passage vers une base formée de vecteurs propres fera l'affaire. Par exemple :

$$\boxed{\text{avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \mathrm{diag}(1,0,0,0), \text{ on a } A_0 = PDP^{-1}.}$$

### Partie II : Une caractérisation des matrices de rang 1

3. a) Par définition du produit matriciel,
$\boxed{U{}^tV \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad (U{}^tV)_{i,j} = u_i v_j.}$

b) $\boxed{\mathrm{tr}(U{}^tV) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = \ldots \text{ accessoirement } \cdots = \langle U, V\rangle = {}^tUV.}$

c) • $U{}^tV$ n'est pas nulle, car il existe $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $u_{i_0} \neq 0$ puisque $U$ n'est pas nulle, et il existe $j_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $v_{j_0} \neq 0$ puisque $V$ n'est pas nulle. Ainsi le coefficient d'indice $(i_0, j_0)$ de $U{}^tV$ n'est pas nul. Donc $\mathrm{rg}(U{}^tV) \geqslant 1$.
• Par la formule du rang, $\dim\ker(U{}^tV) \leqslant n-1$.
De plus, pour tout $W \in (\mathrm{vect}(V))^\perp$, $U{}^tVW = \langle V, W\rangle U = 0$, donc $(\mathrm{vect}(V))^\perp \subset \ker(U{}^tV)$.
Et comme $\dim(\mathrm{vect}(V))^\perp = n-1$, on a $\dim\ker(U{}^tV) = n-1$. Et toujours la formule du rang :
$\boxed{\mathrm{rg}(U{}^tV) = 1.}$
*Ce que la première méthode de la question initiale démontrait quasiment ...*

4. a) Puisque $A$ est de rang 1, $A$ possède au moins une colonne non nulle. Soit $j_0$ l'indice d'une colonne non nulle de $A$.
Alors toutes les autres colonnes de $A$ sont proportionnelles à $C_{j_0}(A)$, sinon $A$ serait au moins de rang 2.
$\boxed{\exists j_0 \in [\![1,n]\!], \quad \forall j \in [\![1,n]\!], \quad \exists \alpha_j \in \mathbb{R}, \quad C_j(A) = \alpha_j C_{j_0}(A).}$

b) Soit $U = C_{j_0}(A) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $V = (\alpha_j)_{1\leqslant j\leqslant n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors $U$ est non nulle par définition de $j_0$ et $V$ est non nulle car $\alpha_{j_0} = 1$, puisque $C_{j_0}(A) = \alpha_{j_0} C_{j_0}(A)$.
On a alors : $(U{}^tV)_{i,j} = u_i v_j = a_{i,j_0}\alpha_j = a_{i,j}$ d'après la relation $C_j(A) = \alpha_j C_{j_0}(A)$.
$\boxed{\exists (U,V) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\})^2, \quad A = U{}^tV.}$

5. La synthèse des deux questions précédentes montre que :
$\boxed{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est de rang 1 si, et seulement si, il existe } (U,V) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\})^2 \text{ telles que } A = U{}^tV.}$

### Partie III : Une application en probabilités

6. Pour tout $(i,j)$ de $[\![1,n]\!]^2$, $(U_X{}^tU_Y)_{i,j} = \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=j) = \mathbb{P}((X=1)\cap(Y=j)) = m_{i,j}$ par indépendance de $X$ et $Y$. De plus, $U_X$ et $U_Y$ sont non nulles puisque $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(U_X = i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(U_Y = i) = 1$. Par la caractérisation précédente,
$\boxed{U_X{}^tU_Y = M \text{ et } M \text{ est de rang 1.}}$

7. Soit $i \in [\![1,n]\!]$.
Comme le $i$-ième coefficient de $C_j(M)$ est $\mathbb{P}((X=i)\cap(Y=j))$, le $i$-ième coefficient de $C_1(M) + \cdots + C_n(M)$ est $\sum_{j}^{1} n\mathbb{P}((X=i)\cap(Y=j))$. D'après la formule des probabilités totales avec les système complet d'événements $([Y=j])_{1\leqslant j\leqslant n}$, cette somme vaut $\mathbb{P}(X=i)$, qui est bien le $i$-ième coefficient de $U_X$.
$\boxed{\text{Ainsi } C_1(M) + \cdots + C_n(M) = U_X.}$

8. Comme $M$ est de rang 1, ses colonnes sont toutes proportionnelles à l'une de ses colonnes non nulles. Soit $j_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $C_{j_0}(M) \neq 0$. Il existe $n$ coefficients réels positifs ou nuls $(\alpha_j)$ tels que, pour tout $j$ de $[\![1,n]\!]$, $C_j(M) = \alpha_j C_{j_0}(M)$. Ces coefficients sont positifs ou nuls car tous les coefficients de $M$ sont des probabilités, donc sont positifs.

La relation précédente donne alors $\left(\sum_{j}^{1} n\alpha_j\right) C_{j_0}(M) = U_X$. De plus, $\sum_{j}^{1} n\alpha_j \geqslant 1$ puisque $\alpha_{j_0} = 1$ et les autres coefficients sont positifs.
Posons, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $\beta_j = \dfrac{\alpha_j}{\sum_k \alpha_k}$.
Alors, pour tout $j$ de $[\![1,n]\!]$, $C_j(M) = \alpha_j C_{j_0}(M) = \dfrac{\alpha_j}{\sum_k \alpha_k} U_X = \beta_j U_X$.

$\boxed{\forall j \in [\![1,n]\!], \exists \beta_j \in \mathbb{R}^+, C_j(M) = \beta_j U_X.}$

9. Soit $j \in [\![1,n]\!]$. $C_j(M) = \beta_j U_X$ entraîne, en sommant tous les coefficients de chaque membre,
**Conclusion.** $\sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = \beta_j \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = i)$, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = \beta_j$,
puisque $([X = i])_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est un système complet d'événements. De plus, d'après la formule des probabilités totales avec ce système complet d'événements, $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = \mathbb{P}(Y = j)$.

$\boxed{\text{Ainsi : } \forall j \in [\![1,n]\!], \beta_j = \mathbb{P}(Y = j).}$

10. Pour tout $(i,j)$ de $[\![1,n]\!]^2$, la $i$-ième ligne de la relation $C_j(M) = \beta_j U_X$ donne exactement
**Conclusion.** $\mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = \mathbb{P}(Y = j)\mathbb{P}(X = i)$.
$\boxed{\text{Donc les variables aléatoires } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes.}}$

## Partie IV : une caractérisation des matrices de rang 1 diagonalisables

8. Comme $\mathrm{rg}(A) = 1$, la formule du rang assure que $\dim \ker(A) = n - 1$, ce qui prouve que
$\boxed{0 \text{ est une valeur propre de } A \text{ et le sous-espace propre associé } \mathrm{SEP}(A,0) = \ker(A) \text{ est de dimension } n-1.}$
*On se souvient que depuis le début, $n \geqslant 2$, donc tout va bien...*

9. a. ${}^tVU = \sum_{i=1}^{n} v_i u_i$ et $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$ par III.6.a (i.e. par définition du produit matriciel).
De plus, $A^2 = (U{}^tV)(U{}^tV) = U({}^tVU){}^tV = a(U{}^tV) = aA^2$.
$\boxed{{}^tVU = (a) \text{ et } A^2 = aA.}$
b. $X^2 - aX = X(X - a)$ est un polynôme annulateur de $A$, dont les racines sont 0 et $a$. Si $a = 0$, l'unique racine de ce polynôme est 0, donc la seule valeur propre de $A$ est 0 (on sait déjà que 0 est une valeur propre de $A$). Comme $\dim \mathrm{SEP}(A,0) = n - 1 < n$, $A$ n'est pas diagonalisable.
$\boxed{\text{Si } a = 0, \text{ alors } A \text{ n'est pas diagonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$
c. Supposons $a \neq 0$. $AU = U{}^tVU = U(a) = aU$, avec $U \neq 0$. Donc $a$ est effectivement une valeur propre de $A$. D'une part, $\mathrm{SEP}(A,a)$ est au moins de dimension 1, d'autre part, $\mathrm{SEP}(A,0)$ et $\mathrm{SEP}(A,a)$ étant en somme directe avec $\dim(\mathrm{SEP}(A,0)) = n - 1$, $\mathrm{SEP}(A,a)$ est au plus de dimension 1. Donc $\dim(\mathrm{SEP}(A,a)) = 1$.
$\boxed{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{Spec}(A) = \{0,a\} \text{ et } \dim(\mathrm{SEP}(A,0)) + \dim(\mathrm{SEP}(A,a)) = n, \text{ donc } A \text{ est diagonalisable dans}}$
d. 13 et 14 induisent la condition nécessaire et suffisante suivante.
$\boxed{\text{Une matrice de rang 1 est diagonalisable si, et seulement si, sa trace est non nulle.}}$

## Partie V : Construction d'un produit scalaire et d'un endomorphisme symétrique

13. Montrons que $\langle .,. \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive.
• Soit $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
$\langle \lambda A + B, C \rangle = \mathrm{tr}({}^t(\lambda A + B)C = \mathrm{tr}(\lambda {}^tAC + {}^tBC) = \lambda \mathrm{tr}({}^tAC) + \mathrm{tr}({}^tBC) = \lambda \langle A, C \rangle + \langle B, C \rangle$.
$\langle B, A \rangle = \mathrm{tr}({}^tBA) = \mathrm{tr}({}^t({}^tBA)) = \mathrm{tr}({}^tAB) = \langle A, B \rangle$.
Donc $\langle .,. \rangle$ est bilinéaire symétrique.
• Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\langle A, A\rangle = \mathrm{tr}({}^tAA) = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2$ donc $\langle A, A\rangle \geqslant 0$, et, puisque $\langle A, A\rangle$ est une somme de termes tous positifs, elle ne peut être nulle que si tous ses termes sont nuls, donc $\langle A, A\rangle = 0$ entraîne $A = O$.
Donc $\langle ., .\rangle$ est définie positive.

$\boxed{\langle ., .\rangle : \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \to \mathbb{R}, (M, N) \mapsto \mathrm{tr}({}^tMN) \text{ est un produit scalaire sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$

*On peut espérer que tout le monde aura reconnu le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour lequel la base canonique $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une base orthonormale.*

14. ${}^tS = {}^t(V{}^tV) = V{}^tV = S$ donc $S$ est symétrique.

$$S^2 = (V{}^tV)(V{}^tV) = V({}^tVV){}^tV = V{}^tV = S \text{ car } {}^tVV = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 = 1.$$

$\boxed{S \text{ est symétrique et vérifie } S^2 = S.}$

15. a) • Soit $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Puisque $\Phi(M) = SM$, $\Phi(M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
De plus : $\Phi(\lambda M + N) = S(\lambda M + N) = \lambda SM + SN = \lambda\Phi(M) + \Phi(N)$.
• Soit $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. Puisque $S$ est symétrique, on a :
**Conclusion.** $\langle \Phi(M), N\rangle = {}^t(SM)N = {}^tM{}^tSN = {}^tM(SN) = \langle M, \Phi(N)\rangle$.

$\boxed{\Phi \text{ est un endomorphisme symétrique de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$

b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\Phi^2(M) = S(SM) = S^2M = SM = \Phi(M)$.

$\boxed{\Phi^2 = \Phi, \text{ donc } \Phi \text{ est un projecteur.}}$

Comme $\Phi(I_n) = S$, $\Phi$ n'est pas l'endomorphisme nul et n'est pas l'identité. En effet, $\mathrm{rg}(S) = 1$ donc $S$ n'est ni nulle ni égale à $I_n$.

$\boxed{\text{Ainsi, } \mathrm{Spec}(\Phi) = \{0, 1\}.}$

c) Comme $\ker\Phi = \mathrm{SEP}(\Phi, 0)$ et $\ker(\Phi - e) = \mathrm{SEP}(\Phi, 1) = \Im\Phi$, on a :
• $\ker\Phi$ et $\ker(\Phi - e)$ sont supplémentaires car $\Phi$ est un projecteur ;
• $\ker\Phi$ et $\ker(\Phi - e)$ sont orthogonaux car les sous-espaces propres des endomorphismes symétriques sont orthogonaux.

$\boxed{\ker\Phi \text{ et } \ker(\Phi - e) \text{ sont supplémentaires orthogonaux dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$

---

Fin de la correction

---