La formule de Stirling, niveau CCP

Dans ce problème, pour tout entier naturel n, on note

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos x\big)^n \,\mathrm{d}x.$$

1. a. Déterminer I_0 et I_1.
   b. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   c. Soit n un entier naturel. Montrer que $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.
   d. Déduire de ce qui précède que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\dfrac{\pi}{2}$, et donner une formule similaire pour I_{2p+1}.
2. a. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on a :

   $$1 \leqslant \frac{I_{n-1}}{I_n} \leqslant \frac{I_{n-2}}{I_n} \leqslant \frac{n}{n-1}.$$

   En déduire la limite de $\dfrac{I_{n-1}}{I_n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   b. Montrer que la suite $\big(nI_nI_{n-1}\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante et déduire des questions précédentes que la suite $\big(nI_n^2\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\dfrac{\pi}{2}$.
3. Dans cette question, on se propose de calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
   a. Justifer brièvement de la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$.
   Montrer que $\dfrac{1}{(n+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n \geqslant 1$ entier, et donner un majorant simple de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
   b. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour toute fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, il existe un réel b tel que

   $$(\forall\, n \in \mathbb{N}^*)\ \left(\left|\int_0^1 g(x)\sin(2n\pi x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{b}{n}\right).$$

   c. Vérifier que pour tout $x \in]0,1[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

   $$2\sum_{k=1}^{n} \cos(2k\pi x) = \operatorname{cotan}(\pi x)\sin(2n\pi x) + \cos(2n\pi x) - 1.$$

   d. On considère la fonction f définie pour tout $x \in]0,1[$ par $f(x) = \dfrac{x(x-1)}{2}\operatorname{cotan}(\pi x)$
   Démontrer que f se prolonge par continuité en une fonction $\widetilde{f}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.
   On pourra se contenter du prolongement en 0...

e. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $J_k = \displaystyle\int_0^1 \frac{x(x-1)}{2} \cos(2k\pi x)\,\mathrm{d}x$.
Calculer J_k et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} J_k = \frac{1}{2}\int_0^1 \widetilde{f}(x)\sin(2n\pi x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x(x-1)}{2}\cos(2n\pi x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x(x-1)}{2}\,\mathrm{d}x.$$

f. Déduire de l'égalité précédente la valeur de $\ell = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

4. Dans la suite du problème, on note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!\mathrm{e}^n}$ et $\delta_n = \ln \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

a. Démontrer à l'aide d'un développement limité que : $\delta_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{12n^2}$.

b. En déduire que série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \delta_n$ converge puis que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite strictement positive.

c. Démontrer qu'il existe un réel $k > 0$ tel que

$$n! \sim k n^n e^{-n}\sqrt{n}$$

d. Conclure ce problème en montrant l'équivalent de Stirling :

$$\boxed{n! \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}.$$