La représentation adjointe, niveau CCP, une correction

Partie I

1. **Quelques généralités.**
   a) Il est aisé de montrer que ad_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   b) • On a $\mathrm{ad}_A(I_n) = 0$. Ainsi $\ker \mathrm{ad}_A$ est non réduit à 0. L'endomorphisme ad_A n'est pas injectif.

   • Notons que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_A(M)) = \mathrm{tr}(AM) - \mathrm{tr}(MA) = 0_{\mathbb{R}}$.
   Ainsi $\mathrm{Im}\, \mathrm{ad}_A \subset \ker \mathrm{tr}$: ad_A n'est pas surjectif.

2. **Etude d'un cas particulier**
   On suppose dans cette question que $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. On note $\mathcal{B}$ la base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ constituée des quatre matrices suivantes :
   $$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{2,1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   a) A dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ admet deux valeurs propre distinctes qui sont 1 et 3 : elle est diagonalisable.

   b) On a $\mathrm{ad}_A(E_{1,1}) = AE_{1,1} - E_{1,1}A = E_{1,1} - (E_{1,1} + E_{1,2}) = -E_{1,2}$ et des calculs similaires amènent :
   $$[\mathrm{ad}_A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   c) Le rang de la matrice précédente est 2 : 0 est donc valeur propre de ad_A (on le savait depuis la première question) et l'espace propre associé est de dimension 2, via le théorème du rang. Il reste au plus deux valeurs propres de ad_A.
   Or la matrice $[\mathrm{ad}_A]_{\mathcal{B}} + 2I_4$ n'est pas inversible (puisque sa seconde colonne est nulle) donc -2 est valeur propre de ad_A.
   Enfin la matrice $[\mathrm{ad}_A]_{\mathcal{B}} - 2I_4$ n'est pas inversible (puisque sa troisième ligne est nulle) donc 2 est valeur propre de ad_A.
   On peut alors affirmer que les valeurs propres de ad_A sont -2, 0 et 2 et que les dimensions respectives des espaces propres associés sont 1, 2 et 1. Il en résulte que ad_A, qui est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, est diagonalisable puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Partie II : Etude du cas où A est diagonalisable.

3. • Comme A est diagonalisable, il existe D diagonale et P inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $A = PDP^{-1}$. Il vient alors :

$$^tA = {}^t(PDP^{-1}) = {}^t(P^{-1}){}^tD{}^tP = Q^{-1}DQ,$$

où $Q = {}^tP$ est inversible. Il en résulte que ${}^tA$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• Pour λ réel on a :

$$\begin{aligned} A - \lambda I_n \text{ inversible} &\Leftrightarrow {}^t(A - \lambda I_n) \text{ inversible} \\ &\Leftrightarrow {}^tA - \lambda I_n \text{ inversible} \end{aligned}$$

Ainsi $A - \lambda I_n$ est non inversible si et seulement si ${}^tA - \lambda I_n$ est non inversible : A et ${}^tA$ ont les mêmes valeurs propres.

4. Il existe λ et μ réels tels que $AX = \lambda X$ et ${}^tAY = \mu Y$, donc ${}^tYA = \mu{}^tY$. On a alors :

$$\mathrm{ad}_A(X{}^tY) = \underbrace{AX}_{=\lambda X}{}^tY - X\underbrace{{}^tYA}_{=\mu{}^tY} = (\lambda - \mu)X{}^tY.$$

Enfin, en notant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, on a $X{}^tY = [x_iy_j]$; de là, puisque X et Y sont non nuls, l'un des coefficients de la matrice $X{}^tY$ est non nul.

Conclusion. $\boxed{X{}^tY \text{ est un vecteur propre de } \mathrm{ad}_A}$.

5. • Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. On écrit $V_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k X_k$ et $V_j = \sum_{\ell=1}^{n} \beta_\ell Y_\ell$ où ...

On a alors :

$$\begin{aligned} V_i{}^tV_j &= \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k X_k\right){}^t\left(\sum_{\ell=1}^{n} \beta_\ell Y_\ell\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k X_k\right)\left(\sum_{\ell=1}^{n} \beta_\ell{}^tY_\ell\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} \alpha_k\beta_\ell X_k{}^tY_\ell \in \mathrm{vect}(\mathcal{F}) \end{aligned}$$

• On sait que, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $E_{i,j} = V_i{}^tV_j \in \mathrm{vect}(\mathcal{F})$. Ainsi $\mathrm{vect}(\mathcal{F})$ contient une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $\mathcal{F}$ est une partie génératrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de cardinal $n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: c'est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

6. Comme A est supposée diagonalisable, ${}^tA$ l'est aussi d'après la question 3. Il existe ainsi $(X_1, \ldots, X_n)$ et $(Y_1, \ldots, Y_n)$ bases de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formées de vecteurs propres de A et ${}^tA$ respectivement.

D'après la question précédente et la question 4, la famille $(X_i{}^tY_j)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est formée de vecteurs propres de ad_A, ce qui signifie exactement que ad_A est diagonalisable.

Partie III

7. **Etude d'un sous-espace propre de ad_A associé à une valeur propre non nulle.**

   a) Pour $k=0$ et $k=1$, c'est évident. Supposons que $\mathrm{ad}_A(T^k) = k\mu T^k$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$. On a alors :

$$\begin{aligned} AT^{k+1} &= (AT^k)T = \big(\mathrm{ad}_A(T^k) + T^k A\big)T \\ &= (k\mu T^k - T^k A)T = k\mu T^{k+1} - T^k AT = k\mu T^{k+1} - T^k \underbrace{(-\mathrm{ad}_A(T) - TA)}_{=-\mu T - TA} \\ &= (k+1)\mu T^{k+1} + T^{k+1}A \end{aligned}$$

   Ainsi $\mathrm{ad}_A(T^{k+1}) = (k+1)\mu T^{k+1}$.
   Par récurrence, on peut donc affirmer que, pour tout $k \in$
   $\mathbb{N}$ on a : $\mathrm{ad}_A(T^k) = k\mu T^k$.

   b) On raisonne par l'absurde et on suppose que pour tout $q \geqslant 1$ on a $T^q \neq 0$. D'après la question précédente, $q\mu$ est alors une valeur propre de ad_A, et ce pour tout $q \geqslant 1$ entier. Ainsi ad_A, qui est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, admet une infinité de valeurs propres (puisque μ est non nul) : c'est profondément stupide !

   Conclusion. $\boxed{\text{Il existe un entier } q \geqslant 1 \text{ tel que } T^q = 0}$.

   c) • Comme $T^{p-1} \neq 0$, il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $T^{p-1}X \neq 0$. Montrons alors que la famille $(X, TX, \ldots, T^{p-1}X)$ est libre dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   Soient $\alpha_0, \ldots, \alpha_{p-1}$ des réels tels que :

$$\alpha_0 X + \alpha_1 TX + \cdots + \alpha_{p-1}T^{p-1}X = 0 \qquad (\spadesuit)$$

   En multipliant à gauche par T^{p-1} on obtient : $\alpha_0 \underbrace{T^{p-1}X}_{\neq 0} = 0$, donc $\alpha_0 = 0$.

   On multiple alors à gauche dans $(\spadesuit)$ par T^{p-2} pour obtenir $\alpha_1 T^{p-1}X = 0$ d'où $\alpha_1 = 0$.
   En itérant ce raisonnement, il vient $\alpha_0 = \ldots = \alpha_{p-1} = 0$: la famille $(X, TX, \ldots, T^{p-1}X)$ est libre.

   • Comme $\dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = n$, on obtient $p \leqslant n$.

8. a. Comme ad_A est un endomorphisme diagonalisable de E on a : $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$.

   Ainsi tout élément V de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit (de manière unique) $V = \sum_{i=1}^{p} W_i$ où $W_i \in E_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$.

   b. Soit $W_i \in E_i$. On a alors $\mathrm{ad}_A(W_i) = \mu_i W_i$ mais aussi : $\mathrm{ad}_A(W_i) = AW_i - W_i A$ donc :

$$\mathrm{ad}_A(W_i)X = AW_iX - W_iAX \ \text{ i.e. } \ \mu_i W_i X = AW_iX - \lambda W_i X$$

   donc $\boxed{AW_iX = (\lambda + \mu_i)W_iX}$

c. Par exemple écrivons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Comme X est un vecteur propre colonne de A, une de ses coordonnées est non nul : il existe $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $x_{i_0} \neq 0$. Pour $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on cherche $V = [v_{i,j}]$ dans E telle que $Y = VX$. Cette dernière égalité est équivalente au système (d'inconnues $v_{i,j}$) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} v_{1,j} x_j & = & y_1 \\ & \vdots & \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} v_{n,j} x_j & = & y_n \end{array} \right.$$

Fixons i dans $\{1, \dots, n\}$. On pose alors $v_{i,j} = \delta_j^{i_0} \dfrac{y_i}{x_{i_0}}$ pour tout j dans $\{1, \dots, n\}$ de sorte que si $V = [v_{i,j}]$ on obtient $VX = Y$ i.e. $\Phi(V) = Y$.

Conclusion. $\boxed{\Phi \text{ est surjective}}$.

d. Prenons Y dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$. Selon la question précédente, il existe V dans E tel que $Y = VX$.
On écrit alors $V = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} W_i$ selon $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} E_i$. Il vient :

$$Y = \sum_{i=1}^{p} W_i X$$

Or chaque $W_i X$ est dans l'espace $\ker(A - (\lambda + \mu_i)I)$ (d'après 6b). Ainsi $M_{n,1}(\mathbb{R})$ est somme des sous-espaces $\ker(A - (\lambda + \mu_i)I)$ qui, lorsqu'ils sont non triviaux, sont des sous-espaces propres de A : E est somme directe des sous-espaces propres de A donc $\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$.

Partie IV : Étude du cas où A est symétrique.

10. Le lecteur montrera facilement que l'application $(. \mid .)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

    Commentaire important. Remarquez que, même si on n'en a pas besoin ici, $(M \mid N) = \mathrm{tr}({}^tNM)\dots$

11. Soient $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, avec $M = [m_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ et $N = [n_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$. Écrivons $M^tN = [q_{i,j}]$. Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ on a :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k} n_{j,k}.$$

Ainsi, il vient :

$$\begin{aligned}
\left(M^tN \mid I_n\right) &= \sum_{i=1}\sum_{j=1}\left(\sum_{k=1}^{n} m_{i,k}n_{j,k}\right)\delta_i^j \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_{i,k}n_{i,k} \\
&= (M \mid N)
\end{aligned}$$

Conclusion. $\boxed{\text{Pour tout } (M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \text{ on a } (M \mid N) = (M^tN \mid I_n)}$.

12. Comme la matrice P est orthogonale, pour tout (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$, on a : ${}^tC_iC_j = \delta_i^j$ (les colonnes d'une matrice orthogonale forment une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire canonique).

13. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

• Écrivons $C_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $C_j = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Les coefficient de la matrice $C_i{}^tC_j$ sont alors x_ky_ℓ pour $(k\ell) \in [\![1,n]\!]^2$. Les coefficients diagonaux de la matrice $C_i{}^tC_j$ sont alors :

$$x_1y_1, \ldots, x_ny_n.$$

• On a alors

$$\left(C_i{}^tC_j \mid I_n\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} x_ky_\ell\delta_k^\ell = \sum_{k=1}^{n} x_ky_k = {}^tC_iC_j = \delta_i^j$$

14. Soient (i,j) et (k,ℓ) dans $[\![1,n]\!]^2$. On a alors, d'après les questions 11, 12 et 13 :

$$\begin{aligned}
(C_i{}^tC_j \mid C_k{}^tC_\ell) &= (C_i{}^tC_j{}^t(C_k{}^tC_\ell) \mid I_n) \\
&= (C_i\underbrace{{}^tC_jC_\ell}_{=\delta_j^\ell}{}^tC_k) \mid I_n) \\
&= \delta_j^\ell(C_i{}^tC_k \mid I_n) = \delta_j^\ell\delta_i^k \\
&= \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) = (k,\ell) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

Il en résulte que $\mathcal{G}$ est une famille orthonormée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc libre. Comme $\text{card}(\mathcal{G}) = n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{G}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Conclusion. $\mathcal{G}$ est une base orthonormale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, constituée de vecteurs propres de ad_A selon la question 4 (puisque chaque C_i est un vecteur propre de A).

Fin de la correction
