La représentation adjointe, niveau CCP

Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur où égal à 2. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note V_i la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la i-ième ligne qui est égal à 1. On admet que la famille $(V_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on note $E_{i,j} = V_i{}^tV_j$. Ainsi, pour tout (i, j) de $[\![1, n]\!]^2$, la matrice $E_{i,j}$ est la matrice carré de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne qui est égal à 1. On admet que la famille $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout λ de $\mathbb{R}$, $A \neq \lambda I_n$. On considère l'application $\mathrm{ad}_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\mathrm{ad}_A(M) = AM - MA.$$

Partie I

1. **Quelques généralités.**
   a) Montrer que ad_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   b) Déterminer $\mathrm{ad}_A(I_n)$. L'endomorphisme ad_A est-il injectif ? surjectif ?

2. **Etude d'un cas particulier**
   On suppose dans cette question que $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. On note $\mathcal{B}$ la base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ constituée des quatre matrices suivantes :
   $$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{2,1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   a) Justifier que la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et donner les valeurs propres de A.
   b) Écrire la matrice de ad_A dans la base $\mathcal{B}$ puis déterminer le rang de cette matrice.
   c) Déterminer les valeurs propres de ad_A et démontrer que ad_A est diagonalisable.

Partie II : Etude du cas où A est diagonalisable.

On suppose dans cette partie que la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Démontrer que ${}^tA$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que A et ${}^tA$ ont les mêmes valeurs propres.
4. Soient X et Y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que X est un vecteur propre de A et Y est un vecteur propre de ${}^tA$. Démontrer que $X{}^tY$ est un vecteur propre de ad_A.
5. Soient $(X_1, \ldots, X_n)$ et $(Y_1, \ldots, Y_n)$ deux bases de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On considère la famille $\mathcal{F} = (X_i{}^tY_j)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$. Démontrer que pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $V_i{}^tV_j$ appartient au sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ engendré par $\mathcal{F}$.
   En déduire que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
6. Démontrer que ad_A est diagonalisable.

Partie III

On suppose dans cette partie que ad_A est diagonalisable.

7. **Etude d'un sous-espace propre de ad_A associé à une valeur propre non nulle.**
   On suppose dans cette question que μ est une valeur propre non nulle de ad_A et que $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un vecteur propre associé.
   a) Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a : $\mathrm{ad}_A(T^k) = k\mu T^k$.
   b) Démontrer qu'il existe un entier $q \geqslant 1$ tel que $T^q = 0$.
   On note, dans la suite de cette question, p le plus petit entier tel que $T^p = 0$ et $T^{p-1} \neq 0$.
   c) Démontrer l'existence de $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que la famille $(X, TX, \dots, T^{p-1}X)$ soit libre dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Comparer alors n et p.
8. On suppose que A admet au moins une valeur propre λ dont on note X un vecteur propre associé dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   On note $\mu_1, \dots, \mu_p$ les valeurs propres distinctes de ad_A.
   On pose encore $E_i = \ker(\mathrm{ad}_A - \mu_i \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$ pour $i \in [\![1, p]\!]$, qui est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   On veut démontrer alors que A est diagonalisable.
   a) Justifier que tout élément W de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit $W = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} W_i$ où $W_i \in E_i$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$.
   b) Soit i dans $[\![1, p]\!]$. Si $W_i \in E_i$ démontrer que : $AW_iX = (\lambda + \mu_i)W_iX$.
   c) Démontrer que $\Phi : E \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ définie par $\Phi(W) = WX$ est surjective.
   d) Conclure.

Partie IV : Étude du cas où A est symétrique.

On suppose dans cette partie que la matrice A est symétrique. Il existe donc une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale. On note $C_1, C_2, \dots, C_n$ les colonnes de P.
Pour tout matrice $M = [m_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ et $N = [n_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit :

$$(M \mid N) = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} m_{i,j} n_{i,j}.$$

10. Montrer que l'application $(. \mid .)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
11. Montrer que : $\forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $(M \mid N) = (M{}^tN \mid I_n)$.
12. Pour tout (i, j) de $[\![1, n]\!]^2$, calculer ${}^tC_iC_j$.
13. Pour tout (i, j) de $[\![1, n]\!]^2$, déterminer les coefficients diagonaux de la matrice $C_i{}^tC_j$ et en déduire la valeur de $(C_i{}^tC_j \mid I_n)$.
14. On considère la famille $\mathcal{G} = (C_i{}^tC_j)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
    Démontrer que $\mathcal{G}$ est une base orthonormée pour le produit scalaire $(. \mid .)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que $\mathcal{G}$ est constituée de vecteurs propres de ad_A.