# Série de Taylor et développement en série entière, CCP 2013. Une correction

## Partie préliminaire

1. La série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$ est la série dérivée de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. Cette dernière a pour rayon de convergence 1 donc la série dérivée est de même rayon de convergence et sa somme est la dérivée de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.
De plus, $\forall x \in \,]-1,1[\,, \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Donc $\forall x \in \,]-1,1[\,, \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

2. Soit $x > 0$. Soient $a$ et $A$ réels tels que $0 < a < A$. Une IPP donne :
$$\int_a^A t^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-t^x\mathrm{e}^{-t}\right]_a^A + x\int_a^A t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = a^x\mathrm{e}^{-a} - A^x\mathrm{e}^{-A} + x\int_a^A t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$
On fait tendre $a$ vers 0 et $A$ vers $+\infty$ :
   - par définition de la fonction $\Gamma$, les deux intégrales tendent respectivement vers $\Gamma(x+1)$ et $\Gamma(x)$.
   - comme $x$ est strictement positif, $a^x$ tend vers 0 donc $a^x\mathrm{e}^{-t} = O(a^x)$ également quand $a$ tend vers 0.
   - Par croissances comparées $A^x\mathrm{e}^{-A}$ tend vers 0 quand $A$ tend vers $+\infty$.

   Par unicité de la limite, on obtient l'égalité $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

   Une récurrence immédiate (à faire) donne $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Pour $n \in \mathbb{N}$ on considère la propriété
$$P(n) : f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)t.$$
   - *Initialisation* :
$\sum k = 00\frac{(x-a)^0}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^0}{0!} f'(t)t = f(a) + \int_a^x f'(t)t = f(a) + f(x) - f(a) = f(x)$.
Donc $P(0)$ est vrai.
   - *Hérédité* :
On suppose que la propriété $P(n-1)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Une intégration par partie correcte, avec les fonctions$u : t \mapsto = \frac{(x-t)^n}{n!}$ et $v : t \mapsto f^{(n)}(t)$ donne
$$\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t)\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t.$$
Avec l'hypothèse de récurrence, on obtient ainsi :
$$\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)t = -\frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a),$$
ce qui prouve que $P(n)$ est vrai.

   **Conclusion.** Par récurrence, $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

## Partie I - Quelques exemples d'utilisation de ce théorème

4. Le développement en série entière du sinus est donné pour $x$ réel par : $\sin x = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p+1}$.

   Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $f(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p}$, valable à posteriori pour $x = 0$.

   Or $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} 0^{2p} = 1 = f(0)$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p}$.

   **Conclusion.** $f$ admet donc un développement en série entière sur$\mathbb{R}$ et elle est donc de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

5. D'après la question 1, pour tout $x \in ]-1,1[$ on a $\displaystyle\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n$. La fonction $f$ définie sur $]-1,1[$ par $f(x) = \displaystyle\frac{x}{(1-x)^2}$ est donc développable en série entière sur l'intervalle $]-1,1[$ et elle y est $C^\infty$, avec pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $\displaystyle\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = n$ i.e. $f^{(n)}(0) = n.n!$.

6. **Un théorème des moments**.
   (a) La fonction $f$ est de classe $C^\infty$ donc continue sur $]-R,R[$. Comme $[0,1] \subset ]-R,R[$ la fonction $f$ est continue sur le segment $[0,1]$ : y est donc bornée : il existe $M > 0$ tel que pour toutx $x \in [0,1]$ on ait $|f(x)| \leqslant M$.

   Par pour tout $x \in ]-R,R[$, la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est absolument convergente, en particulier pour $x = 1$, la série $\displaystyle\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ est absolument convergente.

   Or, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\left| f(x)\displaystyle\frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right| \leqslant M \left| \displaystyle\frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right|$ donc :

$$\sup_{x\in[0,1]} \left| \underbrace{f(x)\frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n}_{=g_n(x)} \right| \leqslant M \left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right|$$

   Il en résulte que par domination, la série $\sum \|g_n\|_{\infty,[0,1]}$ est convergente : la série de fonction $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f(x)\frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge normalement sur l'intervalle $[0,1]$.

   (b) Pour tout $x \in [0,1]$ on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{f(x)\frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n}_{=g_n(x)} = f(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(x)^2.$$

   D'après la question précédente, la série de fonction $\sum g_n$ converge normalement, donc uniformément sur le segment $[0,1]$. Ainsi, le théorème d'intégration terme à terme s'applique :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 g_n(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^1 \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t)}_{=f(t)^2}\, \mathrm{d}t.$$

   Or, par hypothèse, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\int_0^1 g_n(t)\, \mathrm{d}t = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \int_0^1 t^n f(t)\, \mathrm{d}t = 0.$$

   Il vient donc $\displaystyle\int_0^1 f(t)^2\, \mathrm{d}t = 0$. Comme la fonction $f^2$ est **continue et positive** sur $[0,1]$, elle est nulle sur cet intervalle.

(c) Soit $a \in ]0,1[$ fixé. Au voisinage de $a$, $f$ est identiquement nulle donc on a $f^{(n)}(a) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Fixons maintenant $n \in \mathbb{N}$.Pour tout $a \in ]0,1[$ on a donc $f^{(n)}(a) = 0$, donc la fonction $f^{(n)}$ est nulle sur $]0,1[$, et par continuité elle est nulle en 0.

Ainsi, pour tout $x \in ]-R,R[$ on a : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0$.

**Conclusion.** La fonction $f$ est nulle sur l'intervalle $]-R,R[$.

## Partie II - Contre-exemples

7. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Cette fonction $f$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$, comme quotient de telles fonctions et $f$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ avec pour tout $x \in ]-1,1[$ :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Cependant, pour $x = 1$, la série ci-dessus diverge grossièrement :$f$ ne coïncide pas avec sa série de Taylor en 0 sur $\mathbb{R}$ tout entier.

8. (a) Regardez avec Python...

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$ on considère la propriété : $P(n)$ : « Il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x > 0$ on ait $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}} \mathrm{e}^{-1/x^2}$. ».

Montrons par récurrence que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

— *Initialisation*

On pose $P_0 = 1$ qui est bien un polynôme (si si !). Pour tout $x > 0$ on a :

$$\frac{P_0(x)}{x^{3\times 0}} \mathrm{e}^{-1/x^2} = \mathrm{e}^{-1/x^2} = f(x),$$

donc la propriété $P(0)$ est vraie.

— *Hérédité*

Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, la propriété $P(n-1)$ soit vraie. Il existe donc $P_{n-1} \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x > 0$ on a : $f^{(n-1)}(x) = P_{n-1}(x) x^{-3n+3} \mathrm{e}^{-x^{-2}}$.

En dérivant l'égalité précédente, on obtient pour tout $x > 0$ :

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= P'_{n-1}(x) x^{-3n+3} \mathrm{e}^{-1/x^2} + P_{n-1}(x)(-3n+3) x^{-3n+2} \mathrm{e}^{-1/x^2} + P_{n-1}(x) x^{-3n+3} (2x^{-3}) \mathrm{e}^{-1/x^2} \\ &= \frac{1}{x^{3n}} \mathrm{e}^{-1/x^2} \left( x^3 P'_{n-1}(x) + (-3n+2) x^2 P_{n-1}(x) + 2P_{n-1}(x) \right) \end{aligned}$$

On pose alors :

$$P_n = X^3 P'_{n-1} + (-3n+2) X^2 P_{n-1} + 2P_{n-1} \in \mathbb{R}[X].$$

Cela démontre que la propriété $P(n+1)$ est vraie.

**Conclusion.** Par récurrence, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) Pour $n \in \mathbb{N}$ on considère la propriété : $P(n)$ : « La fonction $f$ est de classe $C^n$ sur $[0,+\infty[$ avec $f^{(n)} = 0$. »

Montrons par récurrence cette propriété.

— *Initialisation* :

La restriction de la fonction $f$ est continue à droite en 0, par croissances comparées, donc la propriété $P(0)$ est vraie.

— Hérédité

Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, la propriété $P(n-1)$ soit vraie.

Alors $f^{(n-1)}$ est bien définie et continue sur $[0,+\infty[$. De plus, la fonction $f^{(n-1)}$ est de classe $C^1$ sur $]0,+\infty[$ avec, d'après la question précédente, pour tout $x > 0$ :

$$(f^{(n-1)})'(x) = f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} \mathrm{e}^{-1/x^2}.$$

Par croissances comparées (que l'on peut détailler...) on a : $\lim_{x\to 0^+}(f^{(n-1)})'(x) = 0$.

Le théorème de prolongement de la dérivée version $C^1$ s'applique : $f^{(n-1)}$ est de classe $C^1$ sur $[0,+\infty[$ avec $(f^{(n-1)})'(0) = \lim_{x\to 0^+}(f^{(n-1)})'(x) = 0$.

La fonction $f$ est donc de classe $C^n$ sur $[0,+\infty[$ avec $f^{(n)}(0) = (f^{(n-1)})'(0) = 0$, ce qui démontre que la propriété $P(n)$ est vraie.

**Conclusion.** Par récurrence, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(d) Supposons qu'il existe $r > 0$ tel que la fonction $f$ soit développable en série entière sur $]-r, r[$.
Alors, pour tout $x \in ]-r, r[$ on a :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0$$

ce qui est absurde.

**Conclusion.** La fonction $f$ n'est pas développable en série entière sur aucun intervalle de la forme $]-r, r[$ avec $r > 0$.

9. (a) • Soit $x \in \mathbb{R}$.

— La fonction $g(x,.) : t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{1+tx^2}$ est bien définie et continue sur $[0,+\infty[$.

— Par croissances comparées, $t^2 g(x,t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $g(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o(1/t^2)$. Comme la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$, il en va de même de la fonction $g(x,.)$.

La fonction $g(x,.)$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et la fonction $f$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

• Vérifions les hypothèses du théorème de dérivation des intégrales à paramètres.

— Pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction $g(x,.) : t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

— Pour tout $t > 0$ la fonction $g(.,t) : x \mapsto g(x,y)$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -\frac{2tx e^{-t}}{(1+tx^2)^2}.$$

— Pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,.) : t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$.

— Pour tout $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ on a : $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 2tae^{-t}$ dès que $t \geqslant a$ où $a > 0$.
De plus, la fonction $t \mapsto 2tae^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ ( $\Gamma(2)$...)

Le théorème de dérivation des intégrales à paramètre s'applique : la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} g(x,t)\,dt$ est de classe $C^1$ sur $[a,+\infty[$. Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, elle est de classe $C^1$ sur $]O,+\infty[$

(b) Soit $t > 0$. Pour $x$ réel, dès que $tx^2 < 1$ (i.e. $x \in ]-r, r[$ où $r = 1/\sqrt{t}$) on a :

$$\underbrace{\frac{e^{-t}}{1+tx^2}}_{=g(x,t)} = e^{-t}\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p(tx^2)^p.$$

La fonction $g(.,t) : x \mapsto g(x,t)$ est donc développable en série entière sur l'intervalle $]-r, r[$. De là, pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a :

$$f^{(2p)}(0) = (-1)^p(2p)!t^p e^{-t} \quad \text{et} \quad f^{(2p+1)}(0) = 0.$$

(c) • Pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a : $f^{(2p+1)}(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} 0\mathrm{d}t = 0$ et $f^{(2p)}(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (-1)^p(2p)!e^{-t}t^p\mathrm{d}t = (-1)^p(2p)!\Gamma(p+1) = (-1)^p(2p)!p!$.

Ainsi, la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ :

$\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ n'est autre que la série entière $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0}(-1)^p p!\, x^{2p}$.

Soit $x$ un réel non nul fixé. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose : $u_p = (-1)^p p! x^{2p} \neq 0$.

On a : $\dfrac{|u_{p+1}|}{|u_p|} = p|x|^2 \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Ainsi la série $\sum u_p$ n'est pas absolument convergente : le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0} (-1)^p p!\ x^{2p}$ est nul !

• Si $f$ est développable en série entière sur $]-r, r[$ où $r > 0$, le raoyn de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est alors supérieur à $r$, ce qui contredit le point précédent : $f$ n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.

## Partie III - Condition suffisante

10. Fixons un réel $x \in ]-a, a[$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, provisoirement fixé. La fonction $f$ est de classe $C^{n+1}$ sur l'intervalle $]-a, a[$.
L'inégalité de Taylor Lagrange appliquée à bon droit entre 0 et $x \in ]-a, a[$ donne :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leqslant M \frac{|x-0|^{n+1}}{(n+1)!} = M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Par croissances comparées, $\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Par sandwich, il vient :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x),$$

ce que l'on peut réécrire $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(x)$. La fonction $f$ est donc développable en série entière sur $]-a, a[$.

11. La fonction constante de valeur $10^{888888888888}$ a pour dérivées successives la fonction nulle sur $\mathbb{R}$ : elle est développable en série entière au voisinage de 0 ! ! ! ! ! ! !
Un exemple plus pertinent est celui de exp...