

Dans tout le problème, $\sum f_n$ est une série de fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} et à valeurs réelles.

Partie I

Une série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument sur I lorsque, pour tout $x \in I$, la série $\sum |f_n(x)|$ converge. Dans les deux premières questions on supposera, pour simplifier les démonstrations, que toutes les fonctions f_n sont bornées sur I .

1. a) Rappeler la définition de la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$ sur I .
b) On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I , démontrer que $\sum f_n$ converge absolument sur I .
2. On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I , démontrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur I .
On pourra démontrer que la suite des restes converge uniformément sur I vers la fonction nulle ou utiliser toute autre méthode.
3. On pose pour $x \in [0; 1]$, $f_n(x) = (-1)^n \left(\frac{x^2 + n}{n^2} \right)$.
Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement puis converge uniformément sur $[0; 1]$ mais ne converge absolument en aucune valeur de $[0; 1]$.
4. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument sur I , a-t-on nécessairement $\sum f_n$ qui converge uniformément sur I ?
On attend une réponse détaillée et on pourra utiliser une série entière.

Partie II

Dans toute cette partie, $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est une suite décroissante de réels positifs, $I = [0; 1[$ et pour tout $x \in I$, $f_n(x) = \alpha_n x^n (1 - x)$.

1. Justifier que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est bornée et que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur I .
2. a) Calculer pour $n \geq 1$, $\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in I} |f_n(x)|$.
b) Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur I si et seulement si la série de réels positifs $\sum_{n \geq 1} \frac{\alpha_n}{n}$ converge.
3. a) Calculer pour tout $x \in I$, $\sum_{k=n+1}^{\infty} x^k$.
b) Si on suppose que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0, démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur I .
On pourra observer que pour $k \geq n + 1$, $\alpha_k \leq \alpha_{n+1}$.
c) Réciproquement, démontrer que si la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur I alors la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0.
4. Dans chacun des cas suivants, donner, en détaillant, un exemple de suite décroissante de réels positifs $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ telle que :
a) La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur I .

- b) La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur I .
- c) La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur I mais ne converge pas normalement sur I .
5. Résumer à l'aide d'un schéma toutes les implications possibles, pour une série de fonctions quelconque, entre les convergences : normale, uniforme, absolue et simple sur I .

Fin de l'énoncé
