Devoir supplémentaire de probabilités sur les convergences, une correction

Des résultats préliminaires

1. On a $P(\limsup A_n) \leqslant P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (reste d'une série convergente)

2.) • Si la série $\sum_{n\geqslant 0} P(A_n)$ diverge, c'est traité dans la question précédente.

   • On suppose que la série $\sum_{n\geqslant 0} P(A_n)$ converge. On se ramène à des interserctions, pour pouvoir utiliser l'hypothèse d'indépendance. Par les formules de Morgan :

$$\overline{\limsup A_n} = \overline{\bigcap_{n=0}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k} = \bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}.$$

   Mais si $n \in \mathbb{N}$ on a : $P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}\right) = \lim_{N\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{N} \overline{A_k}\right)$.
   Or, par indépendance, si $N \geqslant n$ dans $\mathbb{N}$ on a :

$$P\left(\bigcap_{k=n}^{N} \overline{A_k}\right) = \prod_{k=n}^{N} P\big(\overline{A_k}\big) = \prod_{k=n}^{N} P(1_P(A_k)) \leqslant \prod_{k=n}^{N} \mathrm{e}^{-P(A_k)} = \exp\left(-\sum_{k=n}^{N} P(A_k)\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

   Ainsi $P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}\right) = 0$, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par sous-additivité :

$$P\big(\overline{\limsup A_n}\big) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}\right) = 0.$$

Partie I - Rapport entre convergence en loi et en probabilité

3. a) • Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $[X_n \leqslant x] \subset [X \leqslant x+\varepsilon] \cap [|X_n - X| > \varepsilon]$.

   En effet, soit $\omega \in [X_n \leqslant x]$. On suppose que $\omega \notin [|X_n - X| > \varepsilon]$. On a alors :

$$-\varepsilon \leqslant X(\omega) - X_n(\omega) \leqslant \varepsilon.$$

   De là $X(\omega) \leqslant X_n(\omega) + \varepsilon = x + \varepsilon$ donc $\omega \in [X \leqslant x + \varepsilon]$.

   Par croissance de la mesure de probabilité, il vient :

$$\begin{array}{rcl} P(X_n \leqslant x) & \leqslant & P\big([X \leqslant x+\varepsilon] \cap [|X_n - X| > \varepsilon]\big) \\ & \leqslant & P(X \leqslant x+\varepsilon) + P(|X_n - X| > \varepsilon) \end{array}$$

   • Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $[X \leqslant x - \varepsilon] \subset [X_n \leqslant x] \cap [|X_n - X| > \varepsilon]$.

   En effet. Soit $\omega \in [X \leqslant x - \varepsilon]$. Supposons que $\omega \notin [|X_n - X| > \varepsilon]$. On a alors

$$-\varepsilon \leqslant X_n(\omega) - X_(\omega) \leqslant \varepsilon.$$

   Il vient donc : $X_n(\omega) \leqslant X(\omega) + \varepsilon \leqslant x$. Ainsi $\omega \in [X_n \leqslant x]$

Comme précédemment, cela amène $F(x-\varepsilon) \leqslant F_n(x) + P(|X_n - X| > \varepsilon)$.

b) Soient x un point de continuité de F et $\alpha > 0$. Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que :

$$(*) \begin{cases} 0 \leqslant F(x+\varepsilon) - F(x) \leqslant \alpha \\ 0 \leqslant F(x) - F(x-\varepsilon) \leqslant \alpha \end{cases}$$

Comme $X_n \xrightarrow{P} X$, on a $P(|X_n - X| > \varepsilon) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Il existe donc $N_\alpha \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_\alpha$ on ait :

$$P(|X_n - X| > \varepsilon) \leqslant \alpha.$$

Si $n \geqslant N_\alpha$ il vient donc, avec les deux inégalité de la question précédente :

$$\begin{cases} F_n(x) \leqslant F(x+\varepsilon) + \alpha \\ F(x-\varepsilon) \leqslant F_n(x) + \alpha \end{cases}$$

En utilisant $(*)$, on obtient pour $n \geqslant N_\alpha$:

$$\begin{cases} F_n(x) - F(x) \leqslant 2\alpha \\ F(x) - \leqslant F_n(x) \leqslant 2\alpha \end{cases}$$

Autrement pour tout $\alpha > 0$ donné, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on a : $|F_n(x) - F(x)| \leqslant 2\alpha$.

On a bien démontré que $F_n(x) \underset{+\infty}{\longrightarrow} F(x)$. Il en résulte que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

4. La fonction de répartition de X est $\mathbb{1}_{[m,+\infty[}$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note F_n la fonction de répartition de X_n. Soit $\varepsilon > 0$. On a :

$$[|X_n - m| > \varepsilon] = [X_n - m > \varepsilon] \sqcup [X_n - m < -\varepsilon].$$

Il vient donc :

$$\begin{aligned} P(|X_n - m| > \varepsilon) &= P(X_n - m > \varepsilon) + P(X_n - m < -\varepsilon) \\ &= 1 - F_n(m+\varepsilon) - F_n(m-\varepsilon) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - 1 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Ainsi $X_n \xrightarrow{P} X$.

Partie II - Rapport entre convergence en moyenne et convergence en probabilité

5. On suppose que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ converge en moyenne vers X. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a, selon l'inégalité de Markov :

$$P(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{E}(|X_n - X|)}{\varepsilon} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par sandwich, $P(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$. ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, il vient $X_n \xrightarrow{P} X$.

6. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $[Y_n \neq 0] = \bigcap_{i=1}^{n} [Z_i \neq 0]$. Par indépendance, il vient :

$$P(Y_n \neq 0) = \prod_{i=1}^{n} P(Z_i \neq 0) = \prod_{i=1}^{n} (1 - P(Z_i = 0)) = (1 - \mathrm{e}^{-\lambda})^n.$$

b. Soit $\varepsilon > 0$. On a :

$$P(Y_n \geqslant \varepsilon) \leqslant P(Y_n \neq 0) = (1 - \mathrm{e}^{-\lambda})^n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Il en résulte que $Y_n \xrightarrow{P} Y$ où Y est une variable aléatoire presque sûrement égale à 0.

c. On a $|Y_n - Y| = Y_n$ donc, par indépendance,

$$\mathbb{E}(|Y_n - Y|) = \mathbb{E}(Y_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(Z_i) = \lambda^n.$$

Si $\lambda > 1$, $\lambda^n \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et la suite (Y_n) ne converge pas en moyenne vers Y. $\square$

Partie III - Rapport entre convergence presque sûre et convergence en probabilité

7. (a) Supposons que $X_n \xrightarrow{ps} X$. Il existe donc $\widetilde{\Omega} \in \mathcal{A}$ tel que $P^big(\widetilde{\Omega}\big) = 1$ et pour tout $\omega \in \widetilde{\Omega}$, $X_n(\omega) \underset{+\infty}{\longrightarrow} X(\omega)$.
Soit $\varepsilon > 0$. On pose :

$$A_n = [|X_n - X| > \varepsilon].$$

On définit :

$$\Omega_\varepsilon = \{\omega \in \Omega \mid (\exists n(\omega) \in \mathbb{N})\, (\forall k \geqslant n)\, (|X_k(\omega) - X(\omega)| \leqslant \varepsilon)\}\,.$$

Ω_ε est bien un événement puisque :

$$\Omega_\varepsilon = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geqslant n} \overline{A_k}.$$

De plus $\widetilde{\Omega} \subset \Omega_\varepsilon$, donc $P(\Omega_\varepsilon) = 1$.
Comme la suite $\bigcap_{k \geqslant n} \overline{A_k}$ est croissante pour l'inclusion il vient :

$$P\big(\overline{A_n}\big) \geqslant P\left(\bigcap_{k \geqslant n} \overline{A_k}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} P(\Omega_\varepsilon) = 1.$$

Par Sandwich on obtient $P(A_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et de là $X_n \xrightarrow{P} X$.

(b) • Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$P(|X_n| \geqslant \varepsilon) = P(X_n = 1) = \frac{1}{n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi $X_n \xrightarrow{P} 0$.

• Notons que la série $\sum_{n \geqslant 1} P(X_n = 1)$ diverge. Selon la loi du zéro-un de Borel-Cantelli (voir question 2), $P(\limsup [X_n = 1]) = 1$. La suite X_n prend donc une infinité de fois la valeur 1 avec la probabilité 1 : elle ne peut pas converger vers 0 presque sûrement.

Partie IV - La loi forte des grands nombres

9. **Critères de convergence presque sûr.**

a) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$, on pose $A_{n,\varepsilon} = [|X_n - X| > \varepsilon]$ et :

$$A_\varepsilon = \text{limsup} A_{n,\varepsilon} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geqslant n} A_{k,\varepsilon}.$$

Comme la série $\sum_{n \geqslant 0} P(A_{n,\varepsilon})$ converge, le lemme de Borel-Cantelli (voir question 1) affirme que $P(A_\varepsilon) = 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $\varepsilon_n = 2^{-n}$. Selon ce qui précède, $P(A_{\varepsilon_n}) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc :

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{\varepsilon_n}\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_{\varepsilon_n}) = 0.$$

Il en résulte que $P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_{\varepsilon_n}}\right) = 1$ et on pose : $\widetilde{\Omega} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_{\varepsilon_n}}$.

Si $\omega \in \widetilde{\Omega}$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\omega \in \overline{A_{\varepsilon_n}} = \bigcup_{N=0}^{\infty} \bigcap_{k=N}^{\infty} \overline{A_{k,\varepsilon_n}}$.
Ainsi, il existe $N_n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant N_n$ on ait : $\omega \in \overline{A_{k,\varepsilon_n}}$ i.e.

$$|X_k(\omega) - X(\omega)| \leqslant \varepsilon_n,$$

et ce pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Comme $\varepsilon_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, pour $\alpha > 0$ il existe n_0 tel que $\varepsilon_{n_0} \leqslant \alpha$ et si $k \geqslant N_{n_O}$ on obtient :

$$|X_k(\omega) - X(\omega)| \leqslant \alpha.$$

Ainsi $X_n(\omega) \underset{+\infty}{\longrightarrow} X(\omega)$ et on vient de démontrer que $X_n \xrightarrow{ps} X$.

b) On utilise l'inégalité de Markov. Pour tout $\varepsilon > 0$, $P(|X_n - X|^p \geqslant \varepsilon^p) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(|X_n - X|^p)}{\varepsilon^p}$.
Par domination, la série $\sum_{n\geqslant 0} P(|X_n - X|^p \geqslant \varepsilon^p)$ converge et donc $X_n \xrightarrow{ps} X$.

10. a) On pose $m = \mathbb{E}(X_1)$. La variable $Y_i = (X_i - m)$ admet un moment d'ordre 4. On a :

$$S_n^4 = (S_{n-1} + Y_n)^4 = S_{n-1}^4 + 4S_{n-1}^3 Y_n + 6S_{n-1}^2 Y_n^2 + 4S_{n-1} Y_n^3 + Y_n^4.$$

Par indépendance et linéarité de l'espérance, il vient :

$$\mathbb{E}(S_n^4) = \mathbb{E}(S_{n-1}^4) + 6\mathbb{E}(S_{n-1}^2)\mathbb{E}(Y_1^2) + \mathbb{E}(Y_1^4).$$

Mais par indépendance des variables Y_i, $\mathbb{E}(S_{n-1}^2) = (n-1)\mathbb{E}(Y_i^2)$. Il existe donc α et β réels tels que :

$$\mathbb{E}(S_n^4) = \mathbb{E}(S_{n-1}^4) + \alpha n + \beta.$$

Ainsi $\mathbb{E}(S_n^4) = \dfrac{n^2}{2}\alpha + n(\beta + \frac{a}{2})$.
Il en résulte que la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{\mathbb{E}(S_n^4)}{n^4}$ converge.

b) Selon le critère vu de convergence presque sûrement, $\dfrac{\mathbb{E}(S_n^4)}{n^4} \xrightarrow{ps} 0$ donc $\dfrac{S_n}{n} \xrightarrow{ps} 0$ et ainsi $\overline{X}_n \xrightarrow{ps} m$.
Ainsi $\overline{X}_n \xrightarrow{ps} \mathbb{E}(X_1)$.

Fin de la correction
