Devoir supplémentaire : notions de convergences en probabilité

On se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

— On dit que $(X_n)_{n \geq 0}$ **converge en probabilité** vers X , et on écrit $X_n \xrightarrow{P} X$, lorsque :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0).$$

— On dit que $(X_n)_{n \geq 0}$ **converge en loi** vers X , et on écrit $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, lorsqu'en tout point x où la fonction de répartition F de X est continue on a :

$$F_n(x) \xrightarrow{+\infty} F(x),$$

où, pour $n \in \mathbb{N}$, F_n désigne la fonction de répartition de X_n .

— On dit que $(X_n)_{n \geq 0}$ **converge en moyenne d'ordre p** vers X , et on écrit $X_n \xrightarrow{L^p} X$, lorsque chaque $|X_n - X|^p$ possède un moment d'ordre p et lorsque :

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(|X_n - X|^p) = 0.$$

On parle de **convergence en moyenne** lorsque $p = 1$ et de **convergence en moyenne quadratique** lorsque $p = 2$.

— On dit que la suite $(X_n)_{n \geq 0}$ **converge presque sûrement** vers X et on écrit $X \xrightarrow{ps} X$ lorsqu'il existe $\tilde{\Omega} \in \mathcal{A}$ tel que $P(\tilde{\Omega}) = 1$ et pour tout $\omega \in \tilde{\Omega}$ on a : $X_n(\omega) \xrightarrow{+\infty} X(\omega)$, autrement dit X_n converge simplement vers X sauf sur un ensemble de mesure nulle.

Des résultats préliminaires

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{A}$. On pose :

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

1. **Lemme de Borel-Cantelli.** Démontrer que si la série $\sum_{n \geq 0} P(A_n)$ converge alors :

$$P(\limsup A_n) = 0.$$

2. **Loi du zéro-un de Borel-Cantelli.** On suppose que les événements de la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont indépendants. Démontrer que :

$$P(\limsup A_n) = \begin{cases} 0 & \text{si la série } \sum_{n \geq 0} P(A_n) \text{ converge} \\ 1 & \text{si la série } \sum_{n \geq 0} P(A_n) \text{ diverge} \end{cases}.$$

Partie I - Rapport entre convergence en loi et en probabilité

3. **La convergence en probabilité implique la convergence en loi.** On suppose que $X_n \xrightarrow{P} X$. On note, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction de répartition de X_n et F celle de X .

a) Soit x un point de continuité de F et $\varepsilon > 0$. Démontrer que :

$$F_n(x) \leq F(x + \varepsilon) + P(|X_n - X| > \varepsilon) \quad \text{et} \quad F(x - \varepsilon) \leq F_n(x) + P(|X_n - X| > \varepsilon).$$

b) En déduire que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

4. On suppose ici que X est presque sûrement constante égale à m et que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. Démontrer que : $X_n \xrightarrow{P} m$.

Partie II - Rapport entre convergence en moyenne et convergence en probabilité

5. Démontrer que si $(X_n)_{n \geq 0}$ converge en moyenne vers X alors $X_n \xrightarrow{P} X$.
6. On considère une suite $(Z_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose, pour $n \geq 1$ entier, $Y_n = \prod_{i=1}^n Z_i$.
  - a) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y_n \neq 0)$.
  - b) Démontrer que $Y_n \xrightarrow{P} Y$, où Y est une variable aléatoire presque sûrement égale à 0.
  - c) La suite (Y_n) converge-t-elle en moyenne vers Y ?

Partie III - Rapport entre convergence presque sûre et convergence en probabilité

7. Démontrer que si $X_n \xrightarrow{ps} X$ alors $X_n \xrightarrow{P} X$.
8. Si $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{1}{n})$, étudier la convergence en probabilité de la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ et montrer qu'elle ne peut converger presque sûrement vers une variable aléatoire presque sûrement nulle.

Partie IV - La loi forte des grands nombres

9. Critères de convergences presque sûr.

- a) Si pour tout $\varepsilon > 0$ la série $\sum_{n \geq 0} P(|X_n - X| > \varepsilon)$ converge démontrer que : $X_n \xrightarrow{ps} X$ (on pourra utiliser le lemme de Borel-Canteli).
- b) Justifier que si, pour tout $n \geq 0$, $|X_n - X|$ admet un moment d'ordre p et si la série $\sum_{n \geq 0} \mathbb{E}(|X_n - X|^p)$ converge alors : $X_n \xrightarrow{ps} X$.

10. **La loi forte des grands nombres.** On suppose que les variables X_n sont indépendantes et identiquement distribuées et que chaque X_n admet un moment d'ordre 4. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n (X_k - \mathbb{E}(X_1))$.

- a) Démontrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\mathbb{E}(S_n^4)}{n^4}$ converge
- b) Démontrer que $\bar{X}_n \xrightarrow{ps} \mathbb{E}(X_1)$.

Ce dernier résultat est la loi forte des grands nombres (valable dès que chaque X_k admet un moment d'ordre 1, mais c'est bien plus difficile à montrer...)

FIN DE L'ÉNONCÉ