Exercice probabilités CCP 2023, une correction

EXERCICE 3 - Un jeu de société

Partie I - Préliminaires

I.1 - Modélisation

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. X_n représente l'avancement relatif à l'étape n.
   S_n représente l'avancement absolu (i.e la position) à l'étape n.
2. T représente « *le temps d'attente* » pour dépasser A, c'est à dire le premier (le plus petit) n tel que $S_n \geqslant A$.

I.2 - Calcul de la somme d'une série entière

3. La fonction f est la somme d'une série entière : elle est de classe C^∞ sur l'intervalle ouvert de convergence de cette dernière qui est $]-1,1[$.
   Montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que $\forall x \in]-1,1[, \quad f^{(p)}(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}$.
   — *Initialisation* : $p = 0$. C'est la définition de f.
   — *Hérédité*. On suppose que pour un certain $p \in \mathbb{N}$ fixé on ait :
   $$\forall x \in]-1,1[, \quad f^{(p)}(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}.$$
   Pour tout $x \in]-1,1[$ on a alors :
   $$f^{(p+1)}(x) = (f^{(p)})'(x) = \frac{d}{dx}p!(1-x)^{-(p+1)} = p!(-1)(-(p+1))(1-x)^{-(p+2)} = \frac{(p+1)!}{(1-x)^{p+2}}.$$
   Par principe de récurrence le résultat est vrai pour tout $p \in \mathbb{N}$.
4. Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé. Posons pour tout $n \geqslant p$, $a_n = \binom{n}{p} > 0$.
   Les coefficients étant > 0 nous pouvons appliquer la règle de D'Alembert sans la variable x pour déterminer R le rayon de convergence : $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n+1}{n+1-p} \to +1$ quand $n \to +\infty$.
   Ainsi $R = \dfrac{1}{1} = +1$.
   Conclusion : le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant p} \binom{n}{p} x^n$ est égal à 1.
5. D'abord par DSE usuel, f est développable en série entière sur $]-1,1[$ et $\forall x \in]-1,1[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.
   Ensuite soit $p \in \mathbb{N}$ par théorème de dérivation des séries entières on peut dériver f p fois terme à terme sur l'ouvert de convergence ce qui donne $f^{(p)}(x) = \displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} p!\binom{n}{p} x^{n-p}$.
   Enfin nous avons l'expression de $f^{(p)}$ obtenue à Q28. il suffit alors de multiplier par x^p et diviser par $p!$ pour obtenir :
   $$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^n = \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}.$$

Partie II - Étude d'un premier cas

Dans cette partie uniquement, on suppose que $M = 2$.

II.1 - Loi des variables aléatoires S_n et T

6. Remarquons que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $X_k \sim \mathcal{B}(1/2)$, S_n apparait donc comme somme de n vad indépendantes suivants toutes une $\mathcal{B}(1/2)$.
   Ainsi, si $n \in \mathbb{N}^*$, S_n suit une loi binomiale de paramètres n et $1/2$.
7. En prenant la définition de T de l'énoncé :
   Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas :

   — Si le procédé s'arrête : $T(\omega) \in \mathbb{N}^*$ et $T(\omega) \geqslant A$ car "au mieux" on a avancé de $+1$ à chaque fois.
   — Si le procédé ne s'arrête pas, (cela peut arriver par exemple lorsque ou tous les X_k renvoient 0) alors $T(\omega) = 0$.

   Ainsi les valeurs prises par la variable aléatoire T sont $\{0\} \cup [\![A, +\infty [\![$.
8. Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant A$.
   Vu qu'ici on ne peut qu'avancer d'un coup ou ne pas bouger à chaque étape,
   $(T = k) = (S_{k-1} = A - 1) \cup (X_k = 1)$.
   Ensuite les évènements $(S_{k-1} = A - 1)$ et $(X_k = 1)$ sont indépendants (par le lemme des coalitions), donc
   $P(T = k) = P(S_{k-1} = A - 1)P(X_k = 1)$ nous connaissons ces lois usuelles , nous avons bien :

$$P(T = k) = \begin{pmatrix} k-1 \\ A-1 \end{pmatrix} \frac{1}{2^k}$$

9. D'après la question 5 on a $P(T = 0) = 1 - P(T > 0)$. Et $P(T > 0) = \sum_{k=A}^{+\infty} \binom{k-1}{A-1} \frac{1}{2^{k-1}} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=A-1}^{+\infty} \begin{pmatrix} k \\ A-1 \end{pmatrix} \frac{1}{2^k}$
   Nous savons évaluer cette somme grâce à la question 5 appliqué à $p = A - 1$ et $x = 1/2$: $\sum_{k=A-1}^{+\infty} \begin{pmatrix} k \\ A-1 \end{pmatrix} \frac{1}{2^k} = \frac{1/2^{A-1}}{1/2^A}$ au final $P(T > 0) = 1$ et $P(T = 0) = 0$.

Il.2 - Espérance de la variable aléatoire T

10. Exploitons ici les résultats obtenus.
    La série entière définissant G_T correspond à celle de la question 4 mais avec un facteur $\frac{1}{2^k}$.
    Cela assure (sans détails ...) que le rayon de convergence $R_T = 2$, ensuite il suffit d'utiliser la formule de la question 5. pour $p = A - 1$ en $\frac{x}{2}$ $(x \in]-2, 2[$ donc $x/2 \in]-1, 1[)$ qui donne bien

$$\forall x \in]-R_T, R_T[, \quad G_T(x) = \left(\frac{x}{2-x} \right)^A.$$

11. Le nombre moyen de tours de jeu pour terminer notre partie est donné par $E(T)$.
Comme $R_T = 2 > 1$,G_T est dérivable en 1, et donc $E(T) = G'_T(1)$.
$G'_T(x) = A(\dfrac{x}{2-x})^{A-1}\dfrac{2}{(2-x)^2}$, ainsi $E(T) = 2A$

Partie III - Étude d'un second cas

Dans cette partie uniquement, on suppose que $A \leqslant M$.

III. 1 - Calcul de la probabilité $P\left(S_n \leqslant k\right)$

12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Appliquons la formule des probabilités totales pour le système complet d'évènements $\left(\left(X_{n+1}=0\right), \ldots, \left(X_{n+1}=M-1\right)\right)$:
Soit $k \leqslant A-1$, $P(S_{n+1} \leqslant k) = \sum_{\ell=0}^{k} P\left(S_{n+1} \leqslant k | X_{n+1} = \ell\right) P(X_{n+1} = \ell)$
Il suffit alors de constater que :
$P\left(S_{n+1} \leqslant k | X_{n+1} = \ell\right) = P\left(S_n \leqslant k - \ell\right)$ et $P(X_{n+1} = M) = \dfrac{1}{M}$
On a bien
$$\forall k \in [\![0, A-1]\!], \quad P\left(S_{n+1} \leqslant k\right) = \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^{k} P\left(S_n \leqslant k - \ell\right).$$

13. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\forall k \in [\![0, A-1]\!], \quad P\left(S_n \leqslant k\right) = \frac{1}{M^n} \binom{n+k}{n}$$
   — Initialisation : $n = 1$ $S_1 = X_1$ et X_1 suit une loi uniforme sur $[\![0, M-1]\!]$.
   Donc $P(X_1 \leqslant k) = \dfrac{k+1}{M}$. Et $\binom{k+1}{1} = k+1$.
   On a bien l'égalité pour $n = 1$.
   — Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque fixé. On suppose l'égalité vraie au rang n.
   Pour calculer $P(S_{n+1} \leqslant k)$ il suffit d'utiliser H.R dans le résultat de la question 12, puis d'appliquer la formule proposée par l'énoncé en début de III.1.

III.2 - Espérance de la variable aléatoire T

14. Les évènements $(T > n)$ et $(S_n < A)$ sont égaux pour tout $n \in \mathbb{N}$.
De plus $(S_n < A) = (S_n \leqslant A-1)$.
Utilisons la formule proposée par l'énoncé, nous avons donc $E(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(S_n \leqslant A-1)$
Or par Q38. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P(S_n \leqslant A-1) = \dfrac{1}{M^n}\dbinom{n+A-1}{n}$.
Cette formule reste vraie pour $n = 0$, $P(S_0 \leqslant A-1) = 1$.
On utilise alors la symétrie des coefficients binomiaux, puis changement d'indice, qui nous ramène à la formule de la Q30. appliqué à $p = A-1$, $x = \dfrac{1}{M}$ qui tous calculs faits donne
$E(T) = \dfrac{M^A}{(M-1)^A}$