Exercice probabilités CCP 2021, une correction

Exercice 1 - Les urnes de Pólya

Partie I - Préliminaires

1. Notons R_i (resp. B_i) l'événement "tirer une boule rouge (resp. blanche) au i-ème tirage."
On a $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$ et

$$P(X_1 = 1) = P(B_1) = \frac{b}{b+r} \quad \text{et} \quad P(X_1 = 0) = P(R_1) = \frac{r}{b+r}$$

car toutes les $b + r$ boules présentes dans l'urne sont équiprobables.

2. • Sachant $X_1 = 1$, on a tiré une boule blanche au premier tirage, donc, avant le second tirage, l'urne contient $b + 1$ boules blanches et r boules rouges équiprobables, donc

$$P_{X_1=1}(X_2 = 1) = P_{X_1=1}(B_2) = \frac{b+1}{r+b+1} \quad \text{et} \quad P_{X_1=1}(X_2 = 0) = P_{X_1=1}(R_2) = \frac{r}{r+b+1}.$$

De même, sachant $X_1 = 0$, on a b boules blanches et $r + 1$ boules rouges équiprobables pour le deuxième tirage, donc

$$P_{X_1=0}(X_2 = 1) = P_{X_1=0}(B_2) = \frac{b}{r+b+1} \quad \text{et} \quad P_{X_1=0}(X_2 = 0) = P_{X_1=0}(R_2) = \frac{r+1}{r+b+1}.$$

• On a $X_2(\Omega) = \{0, 1\}$ et, d'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(X_1 = 0, X_1 = 1)$, on a

$$\begin{aligned}
P(X_2 = 0) &= P(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) + P(X_1 = 1 \cap X_2 = 0) \\
&= P(X_1 = 0)P_{X_1=0}(X_2 = 0) + P(X_1 = 1)P_{X_1=1}(X_2 = 0) \\
&= \frac{r}{b+r}\frac{r+1}{b+r+1} + \frac{b}{b+r}\frac{r}{b+r+1} = \frac{r(b+r+1)}{(b+r)(b+r+1)} = \frac{r}{b+r}
\end{aligned}$$

et $P(X_2 = 1) = 1 - P(X_2 = 0) = \dfrac{b}{b+r}$.

3. • $S_n = b + \sum_{k=1}^{n} X_k$ est égale au nombre de boules présentes dans l'urne au départ auquel on ajoute le nombre de boules blanches tirées au cours des n premiers tirages. Sachant que chaque fois que l'on tire une boule blanche, on en ajoute globalement une dans l'urne, S_n est égale au nombre de boules blanches présentes initialement auquel on ajoute le nombre de boules blanches ajoutées au cours des n premiers tirages. S_n représente donc le nombre de boules blanches présentes dans l'urne avant le $(n + 1)$-ième tirage.
• Comme, à chaque tirage, il y a au moins 1 boule blanche et une boule rouge dans l'urne, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $X_k(\Omega) = \{0, 1\}$.
D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)(\Omega) = [\![0, n]\!]$, donc $S_n(\Omega) = [\![b, b + n]\!]$. Cette formule est encore valable pour $n = 0$ (car $S_0 = b$), donc est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie II - La loi de X_n

4. Soit $k \in [\![b, n + b]\!]$.
Sachant $S_n = k$, l'urne contient au début du $(n + 1)$-ème tirage k boules blanches.
Comme, à chaque tirage, on ajoute exactement une boule (que la boule tirée soit blanche ou rouge), l'urne contient en tout, avant le $(n + 1)$-ème tirage, $r + b + n$ boules, donc $r + b + n - k$ boules rouges.
D'où, comme toutes les boules présentes dans l'urne sont équiprobables,

$$P(X_{n+1} = 1 | S_n = k) = P_{S_n=k}(B_{n+1}) = \frac{k}{r+b+n}.$$

5. Comme S_n est finie, elle admet bien une espérance.
De plus, d'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(S_n = k)_{k \in S_n(\Omega)} = (S_n = k)_{k \in [\![b, b+n]\!]}$, on a :

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 1) &= \sum_{k=b}^{b+n} P(X_{n+1} = 1 \cap S_n = k) = \sum_{k=b}^{b+n} P(S_n = k) P_{S_n = k}(X_{n+1} = 1) \\ &= \sum_{k=b}^{b+n} P(S_n = k) \frac{k}{r+b+n} = \frac{1}{r+b+n} \sum_{k=b}^{b+n} kP(S_n = k) = \frac{E(S_n)}{r+b+n}. \end{aligned}$$

6. Montrons par récurrence forte que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, "X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{b}{b+r}$" (HR_n).
Initialisation : Pour $n = 1$, d'après la question 1, on a $X_1 \sim \mathcal{B}\left(\frac{b}{r+b}\right)$, donc on a bien HR_1.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons HR_k vérifiée pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.
Alors on a $E(X_k) = \frac{b}{b+r}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, donc, par linéarité de l'espérance,

$$E(S_n) = b + \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = b + n\frac{b}{b+r} = \frac{b(b+r+n)}{b+r}.$$

D'où, d'après la question précédente,

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{E(S_n)}{r+b+n} = \frac{b(b+r+n)}{b+r} \frac{1}{r+b+n} = \frac{b}{b+r},$$

et, comme $X_{n+1}(\Omega) = \{0, 1\}$, on a $X_{n+1} \sim \mathcal{B}\left(\frac{b}{b+r}\right)$. On a bien HR_{n+1}.
Conclusion : D'où, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \sim \mathcal{B}\left(\frac{b}{b+r}\right)$.

Partie III - La loi de S_n dans un cas particulier

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a ici $S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} X_k$, donc

$$(S_n = 1) \Leftrightarrow 1 + \sum_{k=1}^{n} X_k = 1 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} X_k = 0 \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!],\ X_k = 0$$

car toutes les variables X_k sont positives, et une somme de positifs est nulle si et seulement si chacun des termes de la somme est nul.

8. On a donc

$$\begin{aligned} P(S_n = 1) &= P\left(\bigcap_{k=1}^{n} (X_k = 0)\right) \\ &= P(X_1 = 0) P_{X_1=0}(X_2 = 0) \times \cdots \times P_{X_1=0 \cap \ldots \cap X_{n-1}=0}(X_n = 0) \quad \text{(formule des probabilités composées)} \\ &= P(X_1 = 0) \times \prod_{k=1}^{n-1} P_{X_1=0 \cap \ldots \cap X_k=0}(X_{k+1} = 0) \\ &= \frac{1}{2} \times \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1+k}{2+k} = \frac{1}{n+1} \quad \text{(télescopage)} \end{aligned}$$

car, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, sachant $X_1 = 0 \cap \ldots \cap X_k = 0$, on a tiré k boules rouges, donc ajouté k boules rouges, et l'urne contient donc $k+1$ rouges et 1 blanche équiprobables au début du $k+1$-ème tirage.
$(S_n = n+1)$ signifie que l'on a tiré que des boules blanches. Dans cette partie, les blanches et les rouges ont des rôles complètement symétriques (même nombre au départ et même comportement à chaque tirage), donc, par symétrie (ou en inversant le rôle des blanches et des rouges), on a bien $P(S_{n+1} = n) = \frac{1}{n+1}$.

9. Soit $(k, \ell) \in [\![1, n+2]\!] \times [\![1, n+1]\!]$.
   (i) Si $\ell \notin \{k-1, k\}$, alors, comme $(S_{n+1} - S_n)(\Omega) = X_{n+1}(\Omega) = \{0, 1\}$, l'événement $(S_{n+1} = k \cap S_n = \ell)$ est impossible (car il implique $S_{n+1} - S_n = k - \ell \notin \{0, 1\}$), donc

$$P(S_{n+1} = k | S_n = \ell) = \frac{P(S_{n+1} = k \cap S_n = \ell)}{P(S_n = \ell)} = \frac{0}{P(S_n = \ell)} = 0.$$

(ii) Si $\ell = k-1$ (et donc $k \geqslant 2$), alors

$$\begin{aligned}
P(S_{n+1} = k | S_n = \ell) &= \frac{P(S_{n+1} = k \cap S_n = k-1)}{P(S_n = k-1)} = \frac{P(S_{n+1} - S_n = 1 \cap S_n = k-1)}{P(S_n = k-1)} \\
&= \frac{P(X_{n+1} = 1 \cap S_n = k-1)}{P(S_n = k-1)} \\
&= \frac{P(S_n = k-1) P_{S_n = k-1}(X_{n+1} = 1)}{P(S_n = k-1)} \quad \text{(formule des probabilités composées)} \\
&= P_{S_n=k-1}(X_{n+1} = 1) = \frac{k-1}{1+1+n} = \frac{k-1}{2+n} \quad \text{(d'après la question 4 avec } k-1 \in \mathbb{N}^* \text{ et } r = b =
\end{aligned}$$

(iii) Enfin, si $\ell = k$, on a de même

$$\begin{aligned}
P(S_{n+1} = k | S_n = \ell) &= \frac{P(S_{n+1} = k \cap S_n = k)}{P(S_n = k)} = \frac{P(S_{n+1} - S_n = 0 \cap S_n = k)}{P(S_n = k)} \\
&= \frac{P(X_{n+1} = 0 \cap S_n = k)}{P(S_n = k)} \\
&= \frac{P(S_n = k) P_{S_n = k}(X_{n+1} = 0)}{P(S_n = k)} \quad \text{(formule des probabilités composées)} \\
&= P_{S_n=k}(X_{n+1} = 0) = 1 - P_{S_n=k}(X_{n+1} = 1) \\
&= 1 - \frac{k}{1+1+n} = \frac{2+n-k}{2+n} \quad \text{(d'après la question 4 avec } k \in \mathbb{N}^* \text{ et } r = b = 1)
\end{aligned}$$

10. Soit $k \in [\![2, n+1]\!]$. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(S_n = \ell)_{\ell \in S_n(\Omega)} = (S_n = \ell)_{\ell \in [\![1,n+1]\!]}$, on a :

$$\begin{aligned}
P(S_{n+1} = k) &= \sum_{\ell=1}^{n+1} P(S_{n+1} = k \cap S_n = \ell) = \sum_{\ell=1}^{n+1} P(S_n = \ell) P_{S_n=\ell}(S_{n+1} = k) \\
&= P(S_n = k-1) P_{S_n=k-1}(S_{n+1} = k) + P(S_n = k) P_{S_n = k}(S_{n+1} = k) + \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \notin \{k-1,k\}}}^{n+1} P(S_n = \ell) \underbrace{P_{S_n=\ell}(S_{n+1} = k}_{=0} \\
&\qquad \text{(car, comme } k \in [\![2, n+1]\!],\ k-1 \text{ et } k \in [\![1, n+1]\!]) \\
&= \frac{k-1}{n+2} P(S_n = k-1) + \frac{n+2-k}{n+2} P(S_n = k).
\end{aligned}$$

11. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, « *S_n suit la loi uniforme sur* $[\![1, n+1]\!]$ » (HR_n).
— **Initialisation :** Pour $n = 0$, $S_0 = 1 \sim \mathcal{U}([\![1,1]\!])$, donc on a bien HR_0.
Pour $n = 1$, on a $X_1 \sim \mathcal{B}(1/2) = \mathcal{U}([\![0,1]\!])$ d'après la question 1 avec $r = b = 1$. On a donc $S_1 = 1 + X_1 \sim \mathcal{U}([\![1,2]\!])$. On a bien HR_1.
— **Hérédité.** Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété HR_n soit vérifiée.
Alors on a $S_{n+1}(\Omega) = [\![1, n+2]\!]$ (d'après la question 3), $P(S_{n+1} = 1) = \frac{1}{n+2}$ (d'après la question 8), $P(S_{n+1} = n+2) = \frac{1}{n+2}$ (admis dans l'énoncé) et, pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
P(S_{n+1} = k) &= \frac{k-1}{n+2} P(S_n = k-1) + \frac{n+2-k}{n+2} P(S_n = k) \\
&= \frac{k-1}{n+2}\frac{1}{n+1} + \frac{n+2-k}{n+2}\frac{1}{n+1} \quad \text{(d'après } HR_n \text{ avec } k-1 \text{ et } k \in S_n(\Omega) = [\![1, n+1]\!]) \\
&= \frac{n+1}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{n+2}.
\end{aligned}$$

On a donc bien $S_{n+1} \sim \mathcal{U}([\![1, n+2]\!])$,.

Conclusion. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n \sim \mathcal{U}([\![1, n+1]\!])$.