A propos des polynômes orthogonaux

Partie A

1. • Il est clair que l'application $(P, Q) \mapsto (P \mid Q)_w$ est **bilinéaire et symétrique**. Il reste à montrer qu'elle est définie et positive. Prenons donc P un élément quelconque de $\mathbb{R}[X]$. On a :

$$(P \mid P)_w = \int_a^b P(t)^2 w(t) \mathrm{d}t$$

Comme $w \geqslant 0$, on a donc $P(t)^2 w(t) \geqslant 0$ pour tout t dans $[a, b]$ et par positivité de l'intégrale ($a < b$) il vient : $\boxed{(P \mid P)_w \geqslant 0}$.
Puis si $(P \mid P)_w = 0$, comme $t \mapsto P(t)^2 w(t)$ est **positive et continue** sur $[a, b]$, on a $P(t)^2 w(t) = 0$ pour tout t dans $[a, b]$. Or w ne s'annule qu'un nombre fini de fois ce qui assure que P^2 a une infinité de racines : c'est le polynôme nul et il en va de même pour P.

Conclusion. $(.|.)_w$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

• L'égalité $(PQ|R)_w = (P|QR)_w$ pour tous les polynômes P, Q et R est évidente.

2. On peut construire par récurrence une suite (P_n) dans $\mathbb{R}[X]$ qui vérifie :

$$\begin{cases} \deg P_n = n & \text{pour tout } n \text{ entier} \\ (P_n \mid P_m)_w = 0 & \text{pour tout } n \neq m \text{ entiers} \end{cases}$$

de la manière suivante.
   - On choisit P_0 polynôme constant non nul (donc de degré 0), par exemple $P_0 = 1$.
   - Puis pour $n \geqslant 0$ entier, si $P_0, \ldots, P_n$ ont été construits de manière que :

$$\begin{cases} \deg P_k = k & \text{pour tout } k \text{ dans } \{0, \ldots, n\} \\ (P_k \mid P_\ell)_w = 0 & \text{pour tout } k \neq \ell \text{ dans } \{0, \ldots, n\} \end{cases}$$

   alors on choisit P_{n+1} non nul dans l'orthogonal de $\mathbb{R}_n[X]$ $\boxed{\text{dans } \mathbb{R}_{n+1}[X]}$ de sorte que P_{n+1} est de degré $n + 1$ et vérifie :

$$(P_{n+1} \mid P_k)_w = 0 \quad \text{pour tout } k \text{ dans } \{0, \ldots, n\}$$

3. Si (P_n) est une suite w-orthogonale échelonnée alors la famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre dans $\mathbb{R}[X]$ puisqu'à degrés échelonnés.
Puis prenons P dans $\mathbb{R}[X]$. Si $N = \deg P$ alors $P \in \mathbb{R}_N[X]$. Mais la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_N)$ est une famille libre de de $N + 1$ vecteurs de $\mathbb{R}_N[X]$ qui est un espace vectoriel de dimension $N + 1$ donc c'est une base de $\mathbb{R}_N[X]$ et ainsi P est combinaison linéaire sur $\mathbb{R}$ des éléments de $(P_0, P_1, \ldots, P_N)$. Il en résulte que la famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ engendre $\mathbb{R}[X]$: comme elle est libre, c'est une base de $\mathbb{R}[X]$.

4. Fixons $n \geqslant 1$ entier. On a vu à la question 3 que si n est un entier, $(P_0, \ldots, P_{n-1})$ et $(Q_0, \ldots, Q_{n-1})$ sont des bases de $R_{n-1}[X]$.
Maintenant plaçons nous dans $\boxed{E = \mathbb{R}_n[X]}$ où vivent les polynômes P_n et Q_n. On sait que P_n est orthogonal à chaque P_k pour k dans $\{0, \ldots, n-1\}$ donc P_n appartient à l'orthogonal de $\mathrm{vect}_{\mathbb{R}}(P_0, \ldots, P_{n-1}) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ $\boxed{\text{dans } E}$ et il en va de même de Q_n. Mais $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est de codimension 1 dans $E = \mathbb{R}_n[X]$

donc son orthogonal dans E est une droite vectoriel à laquelle appartiennent P_n et Q_n : ils sont donc liés.
Enfin P_0 et Q_0 sont liés car constant. (Note [1])

Commentaire.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les racines du *nième* polynôme d'une suite w-orthogonale et échelonnée ne dépend pas du choix de cette suite!!!!!
En effet si on a deux telles suites (P_n) et (Q_n) on a montré que pour tout n entier il existe λ_n réel (non nul) tel que : $Q_n = \lambda_n P_n$ ce qui assure que $\boxed{P_n \text{ et } Q_n \text{ ont les même racines}}$!!!!!!

Autre méthode. On procède par ***récurrence faible***. On envisage pour n entier la propriété :

$$\mathcal{P}_n : \textit{Il existe } \lambda_n \textit{ réel tel que } P_n = \lambda_n Q_n.$$

- $\mathcal{P}_0$ est clairement vraie puisque les polynômes P_0 et Q_0 sont de degré 0 : ils sont constants.

- On suppose alors pour une certain entier naturel n que $\mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_n$ sont vraies et on montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ est alors vraie. Par hypothèse, on dispose de $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ réels tels que :

$$(\forall k \in \{0, \dots, n\})\,(P_k = \lambda_k Q_k)$$

Appelons alors α_{n+1} et β_{n+1} les coefficients dominants respectifs de P_{n+1} et Q_{n+1} ; comme ces deux polynômes sont de degré $n+1$ alors α_{n+1} et β_{n+1} sont non nuls. Puis le polynôme :

$$A_{n+1} = P_{n+1} - \frac{\alpha_{n+1}}{\beta_{n+1}} Q_{n+1}$$

est de degré inférieur à n (note [2]) Comme $(P_0, \dots, P_n)$ est une base $\mathbb{R}_n[X]$ il existe alors $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ dans $\mathbb{R}$ tels que :

$$A_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k = \alpha_0 P_0 + \cdots + \alpha_n P_n \quad (\clubsuit)$$

Mais les familles $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont w-orthogonales : pour tout k dans $\{0, \dots, n\}$ on a :

$$\begin{cases} (P_{n+1}|P_k)_w = 0 \\ (Q_{n+1}|P_k)_w = (Q_{n+1}|\lambda_k Q_k)_w = \lambda_k (Q_{n+1}|\lambda_k Q_k)_w = 0 \end{cases}$$

Il en résulte que pour tout k dans $\{0, \dots, n\}$ on a $(A_{n+1}|P_k)_w = 0$ et ainsi, avec $(\clubsuit)$, chacun des α_k est nul. En définitif on a $A_{n+1} = 0$ ce qui assure que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

5. • Tout d'abord, si $n \geqslant 1$ est un entier alors P_n est orthogonal à chaque P_k pour tout $k \neq n$ entier naturel : ainsi

$$P_n \in \operatorname{vect}_{\mathbb{R}}(P_0, \dots, P_{n-1})^{\perp} = \mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}$$

• Soient maintenant $n \geqslant 2$ entier et $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg Q \leqslant n-2$. On a alors $XQ \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc $(XQ, P_n)_w = 0$. Or selon la première question on a : $(XQ, P_n)_w = (Q, XP_n)_w$ ce qui démontre que $\boxed{(XP_n, Q)_w = 0}$.

6. • Soit $n \geqslant 1$ entier naturel. Le polynôme XP_n est dans $\mathbb{R}_{n+1}[X] = \operatorname{vect}_{\mathbb{R}}(P_0, \dots, P_{n+1})$: il existe donc $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n+1})$ unique dans $\mathbb{R}^{n+2}$ tel que :

$$XP_n = \sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k P_k = \lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_{n+1} P_{n+1}$$

1. Il est important de comprendre la chose suivante. L'orthogonal de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ est très gros (de dimension infinie) par contre l'orthogonal de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ est une droite vectorielle.
2. Cette idée a déjà été rencontrée dans la preuve de la division euclidienne des polynômes...

Selon la question précédente on a pour tout $i \leqslant n-2$ entier :

$$0 = (XP_n|P_i)_w = \left(\sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k P_k | P_i\right)_w = \sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k (P_k|P_i)_w = \lambda_i \underbrace{\|P_i\|_w^2}_{\neq 0}$$

et il reste donc

$$XP_n = \lambda_{n-1} P_{n-1} + \lambda_n P_n + \lambda_{n+1} P_{n+1}$$

On pose alors $\alpha_n = \lambda_{n+1}$, $\beta_n = \lambda_n$ et $\gamma_n = \lambda_{n-1}$. Notons qu'un tel triplet est unique puisqu'il s'agit des composantes de XP_n dans la base $(P_0, \ldots, P_{n+1})$ de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$.

• On fait de même pour $n = 0\ldots$

Conclusion. Il existe un unique couple (α_0, β_0) et pour tout $n \geqslant 1$ un unique triplet $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ tels que :

$$XP_0 = \alpha_0 P_1 + \beta_0 P_0 \quad \text{et} \quad XP_n = \alpha_n P_{n+1} + \beta_n P_n + \gamma_n P_{n-1}$$

7. • Soit $n \geqslant 1$ entier. On écrit comme à la question 6 :

$$XP_n = \alpha_n P_{n+1} + \beta_n P_n + \gamma_n P_{n-1} \quad (\heartsuit)$$

Dans l'égalité ci-dessus, les seuls membres de degré $n+1$ sont XP_n et P_{n+1}, les autres sont de degré au plus n. Ainsi XP_n et P_{n+1} ont même coefficients dominants, ce qui donne la relation :

$$\boxed{\alpha_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}}$$

• On regarde cette fois les coefficients des termes en X^n dans la relation $(\heartsuit)$. On obtient :

$$b_n = \alpha_n b_{n+1} + \beta_n a_n \quad \text{donc} \quad \boxed{\beta_n = \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}}$$

• Par orthogonalité de la famille (P_n) on obtient avec $(\heartsuit)$:

$$(P_{n-1} \mid XP_n)_w = \gamma_n \|P_{n-1}\|_w^2 \quad \text{donc} \quad \gamma_n = \frac{(P_{n-1} \mid XP_n)_w}{\|P_{n-1}\|_w^2} = \frac{(XP_{n-1} \mid P_n)_w}{\|P_{n-1}\|_w^2}$$

Remarquons alors que XP_{n-1} est un polynôme de degré n et de coefficient dominant a_{n-1}. Posons alors :

$$R = XP_{n-1} - \frac{a_{n-1}}{a_n} P_n$$

Ce polynôme R est dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc $(P_n \mid R)_w = 0$ puisque $P_n \in \mathbb{R}_n[X]^\perp$ comme on l'a déjà rencontré. Il vient donc :

$$(XP_{n-1} \mid P_n)_w = \left(R + \frac{a_{n-1}}{a_n} P_n \mid P_n\right)_w = \frac{a_{n-1}}{a_n} \|P_n\|_w^2$$

ce qui donne bien en définitif :

$$\boxed{\gamma_n = \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{\|P_n\|_w^2}{\|P_{n-1}\|_w^2}}$$

8. a. • On est rusé comme un singe [3] et on remarque que pour x dans $x \in]0,\pi[$ on a :

$$\frac{\sin x}{\sin x} = 1, \quad \frac{\sin 2x}{\sin x} = 2\cos x, \quad \frac{\sin 3x}{\sin x} = 4\cos^2 x - 1$$

ce qui permet de dire que :

$$\boxed{P_0 = 1, \quad P_1 = 2X \quad \text{et} \quad P_2 = 4X^2 - 1}$$

b. Montrons l'existence des polynômes de Tchébichev de seconde espèce. On calque ce que l'on sait pour les polynômes de Tchébichev de première espèce. Pour n entier naturel la formule de Moivre affirme que :

$$(\cos x + \mathrm{i}\sin x)^{n+1} = \cos(n+1)x + \mathrm{i}\ \sin(n+1)x$$

On utilise le binôme de ce bon vieux Newton et en égalant les parties imaginaires, il vient :

$$\mathrm{i}\ \sin(n+1)x = \sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} \begin{pmatrix} n+1 \\ 2k+1 \end{pmatrix} (\mathrm{i}\ \sin x)^{2k+1} (\cos x)^{n-2k}$$

Puis pour x dans $]0,\pi[$ on a $\sin x > 0$ donc :

$$\begin{aligned} \frac{\sin(n+1)x}{\sin x} &= \sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} (-1)^k \begin{pmatrix} n+1 \\ 2k+1 \end{pmatrix} (\sin x)^{2k} (\cos x)^{n-2k} \\ &= \sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} (-1)^k \begin{pmatrix} n+1 \\ 2k+1 \end{pmatrix} (1-\cos^2 x)^{k} (\cos x)^{n-2k} \end{aligned}$$

Alors le polynôme $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} (-1)^k \begin{pmatrix} n+1 \\ 2k+1 \end{pmatrix} (1-X^2)^k X^{n-2k}$ convient.

Pour l'unicité, c'est encore pareil : si les polynômes P_n et Q_n conviennent alors $P_n - Q_n$ est nul sur $]-1,1[$ (image de $]0,\pi[$ par cos) et ainsi $P_n - Q_n = 0$ puisque le polynôme $P_n - Q_n$ admet une **infinité de racines**.

c. Pour tout x réel on a $\sin(n+2)x + \sin nx = 2\cos x\ \sin(n+1)x$. Ainsi pour x dans $]0,\pi[$ on a :

$$\frac{\sin(n+2)x}{\sin x} + \frac{\sin nx}{\sin x} = 2\cos x \frac{\sin(n+1)x}{\sin x}$$

ce qui amène donc :

$$P_{n+1}(\cos x) + P_{n-1}(\cos x) = 2\cos x\ P_n(\cos x) \quad (\spadesuit)$$

Important !!!!!

$(\spadesuit)$ étant vrai pour tout x dans $]0,\pi[$, alors pour tout t dans $]-1,1[$ (image de $]0,\pi[$ par cos) on a :

$$P_{n+1}(t) + P_{n-1}(t) = 2t\ P_n(t)$$

Ainsi le polynôme $P_{n+1} + P_{n-1} - 2X\ P_n$ admet une infinité de racines : il est nul. On a donc pour tout $n \geqslant 1$ entier :

$$\boxed{P_{n+1} + P_{n-1} = 2X\ P_n}$$

3. savant ...

d. • Prenons m et n dans $\mathbb{N}$, $\boxed{\textit{distincts}}$. On a alors :

$$(P_n|P_m)_w = \int_{-1}^{1} P_n(t)P_m(t)\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$$

On effectue le changement de variable naturel $t = \cos\theta$ pour obtenir :

$$(P_n|P_m)_w = \int_{\pi}^{0} P_n(\cos\theta)P_m(\cos\theta)\sqrt{1-\cos^2\theta}(-\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

Mais on a $\sqrt{1-\cos^2\theta} = |\sin\theta| = \sin\theta$ pour tout $\theta \in [0,\pi]$ et par définition des polynômes de Tchébichev de seconde espèce on obtient :

$$\begin{aligned}(P_n|P_m)_w &= \int_0^{\pi} \sin(n+1)\theta\ \sin(m+1)\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\pi} \left(\frac{\mathrm{e}^{i(n+1)\theta} - \mathrm{e}^{-i(n+1)\theta}}{2i}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^{i(m+1)\theta} - \mathrm{e}^{-i(m+1)\theta}}{2i}\right)\mathrm{d}\theta \\ &= -\frac{1}{4}\int_0^{\pi} \left(\mathrm{e}^{i(m+n+2)\theta} + \mathrm{e}^{-i(m+n+2)\theta} - \mathrm{e}^{i(m-n)\theta} - \mathrm{e}^{-i(m-n)\theta}\right)\mathrm{d}\theta \\ &= -\int_0^{\pi} \cos(m+n+2) - \cos(m-n)\theta\,\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

En intégrant on trouve (correctement puisque les dénominateurs qui apparaissent sont non nuls !) :

$$(P_n|P_m)_w = 0$$

• Enfin, en vertu de la relation de récurrence trouvée à la question précédente, une petite récurrence faible permet de démontrer que $\deg P_n = n$ pour tout n entier.

Conclusion. La famille des polynômes de Tchébichev de seconde espèce est une suite w-orthogonale échelonnée pour la fonction :

$$w = \begin{pmatrix} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{1-x^2} \end{pmatrix}$$

Partie B
Racines des polynômes orthogonaux

---

9. Si P_n désigne le *nième* polynôme de Tchébychev de seconde espèce alors on a pour tout x dans $]0,\pi[$:

$$P_n(\cos x) = \frac{\sin(n+1)x}{\sin x}$$

En particulier, pour tout k dans $\{1,\ldots,n\}$ on a :

$$P_n(\cos\tfrac{k\pi}{n+1}) = \frac{\sin k\pi}{\sin\frac{k\pi}{n+1}} = 0$$

Ainsi les racines de P_n sont les $\cos\frac{k\pi}{n+1}$ pour k dans $\{1,\ldots,n\}$. Elles sont clairement dans $]-1,1[$ et distinctes puisque cos décroît strictement sur $[0,\pi]$: elles sont donc au nombre de n qui est le degré de P_n.

Conclusion. P_n est scindé à racines simples dans $]-1,1[$ et ses racines sont par ordre croissant :

$$\cos\tfrac{n\pi}{n+1} < \cos\tfrac{(n-1)\pi}{n+1} < \cdots < \cos\tfrac{\pi}{n+1}$$

10. a. Notons $r_{p+1}, \dots, r_q$ toutes les autres racines de P dans $[a, b]$ (qui sont donc des racines d'ordre pair). On a alors :

$$P_n = (X - r_1)^{2\alpha_1+1} \cdots (X - r_p)^{2\alpha_r+1} (X - r_{p+1})^{2\alpha_{r+1}} \cdots (X - r_q)^{2\alpha_q} S$$

où α_1,. . .,α_q sont des entiers et S est un polynôme sans racine sur $[a, b]$. Comme S est sans racine sur $[a, b]$ et est continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, S **est de signe constant** et on a alors :

$$P_n = R \underbrace{(X - r_1)^{2\alpha_1} \cdots (X - r_p)^{2\alpha_r} (X - r_{p+1})^{2\alpha_{r+1}} \cdots (X - r_q)^{2\alpha_q} S}_{=Q}$$

où Q est clairement de signe constant sur $[a, b]$ (mais peut s'annuler).

b. Si $p < n$ alors $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et comme $P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$ on a $(P_n|R)_w = 0$.

c. Selon ce qui précède, $\boxed{\text{si } p < n}$, on a :

$$0 = (P_n \mid R)_w = \int_a^b P_n(t)R(t)w(t) \, \mathrm{d}t = \int_a^b Q(t)R(t)^2 w(t) \, \mathrm{d}t$$

Ainsi, la fonction $t \mapsto Q(t)R(t)^2 w(t)$, qui est $\boxed{\text{continue et de signe constant sur } [a, b]}$, est nulle sur $[a, b]$. Mais w n'admet qu'un nombre fini de zéros sur $[a, b]$, ce qui implique que le polynôme QR^2 admet une infinité de racines. Il en résulte que $\boxed{Q = 0 \text{ ou } R = 0}$ et ainsi $P_n = RQ = 0$ ce qui est stupide.

Ainsi $p = n$, donc R est de degré n. Comme P_n l'est aussi, le polynôme Q est en fait une constante non nulle : P_n admet n racines simples dans $[a, b]$.

11. Notons tout d'abord que P_0 est de degré 0 donc c'est un polynôme constant non nul : **il n'a pas de racine**. En particulier P_1 et P_0 n'ont pas de racines commune.

Puis raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $n \geqslant 1$ entier tel que P_{n+1} et P_n aient une racine commune α. On peut écrire selon la question 6 :

$$XP_n = \alpha_n P_{n+1} + \beta_n P_n + \gamma_n P_{n-1}$$

et il vient donc $\gamma_n P_{n-1}(\alpha) = 0$. Mais $\gamma_n \neq 0$ selon la question 7 (puisque qu'il est obtenu par produit et quotient de coefficients dominants et de normes de polynômes non nuls). Ainsi α est racine de P_{n-1}. En itérant cela on obtient $P_0(\alpha) = 0$ ce qui est stupide.

Conclusion : pour tout entier n, les polynômes P_{n+1} et P_n n'ont pas de racine commune.

Fin de la correction
