Devoir n° 7

Exercice 1 - Polynôme de Laguerre et méthode de quadrature de Gauss

Partie I - Produit Scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

I.1 - Généralités

1. Soient $(P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$ et f la fonction $t \mapsto P(t)Q(t)\exp(-t)$.
   — Par produit, la fonction f est continue sur $[0;+\infty[$.
   — Par croissances comparées $\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} t^2 f(t) = 0$ et $f(t) = o(1/t^2)$. Comme $2 > 1$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ donc f aussi.

   Conclusion. La fonction f est intégrable sur $[0;+\infty[$ et donc l'intégrale définissant $(P|Q)$ est convergente.

2. Soit $\Phi : (P,Q) \mapsto (P|Q)$.
   — La question précédente prouve que Φ est définie sur $(\mathbb{R}_n[X])^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   — Pour $(P_1, P_2, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$, par linéarité de l'intégrale ,
   $\Phi(P_1 + \lambda P_2, Q) = \Phi(P_1, Q) + \lambda\Phi(P_2, Q)$: Φ est linéaire à gauche.
   — Par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$, pour tout $(P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$, $\Phi(P,Q) = \Phi(Q,P)$: Φ est symétrique.
   — Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. $\Phi(P,P) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)^2 \mathrm{e}^{-t} dt$. Pour tout $t \in [0;+\infty[$, $P(t)^2\mathrm{e}^{-t} \geqslant 0$ donc, par positivité de l'intégrale, $\Phi(P,P) \geqslant 0$: Φ est positive.
   — On suppose $\Phi(P,P) = 0$; alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)^2\mathrm{e}^{-t}dt = 0$. Comme $t \mapsto P(t)^2\mathrm{e}^{-t}$ est **continue et positive**, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $P(t)^2\mathrm{e}^{-t} = 0$ et $P(t) = 0$. Ainsi le polynôme P a une infinité de racines, donc $P = 0$.

   Conclusion. Φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n(X)$.

I.2 - Calcul d'un produit scalaire

3. On pose, pour $t \in \mathbb{R}^+$, $u(t) = t^k$, $v(t) = -\mathrm{e}^{-t}$. u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$, pour $t \geqslant 0$, $u'(t) = kt^{k-1}$, $v'(t) = \mathrm{e}^{-t}$. De plus, par croissance comparée, $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ donc, par intégration par parties, $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ c'est-à-dire,

$$\int_0^{+\infty} t^k\mathrm{e}^{-t}dt = k\int_0^{+\infty} t^{k-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

4. On suppose que pour un certain $k \in \mathbb{N}$ on a : $(X^k|1) = k!$.
   D'après la question précédente, on a : $(X^{k+1}|1) = (k+1)(X^k|1) = (k+1)!$. Comme $(X^k|1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}dt = 1$, on peut conclure par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a : $(X^k|1) = k!$.

Partie II - Construction d'une base orthogonale

II.1 - Propriétés de l'application α

5. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\deg P \leqslant n$ donc $\deg P' \leqslant n-1$, $\deg P'' \leqslant n-2$; ainsi $\alpha(P)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n.
   De plus, par linéarité de la dérivation, α est linéaire donc α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

6. On a : $\alpha(1) = 0$, $\alpha(X) = 1 - X$ et, pour $k \geqslant 2$, $\alpha(X^k) = k(k-1)X^{k-1} + kX^{k-1} - kX^k = -kX^k + k^2X^{k-1}$. La matrice de α dans la base $(1, X, \cdots, X^n)$ est donc

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n^2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -n \end{pmatrix}$$

7. Cette matrice est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux à savoir $0,\ -1,\ -2, \cdots, -n$. α possède donc $n+1$ valeurs propres distinctes et $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$ donc α est diagonalisable et les sous-espaces propres sont de dimension 1..

   Conclusion. L'endomorphisme α est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(\alpha) = \{-k;\ k \in \{0, \ldots, n\}$.

II.2 - Vecteurs propres de l'application α

8. D'après la question précédente, le polynôme caractéristique de α est scindé à racines simples donc les sous espaces propres de α sont de dimension 1 : $\dim\ker(\alpha + k\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}) = 1$. $\mathrm{Sp}(\alpha) = \{-k \mid k \in \{0, \ldots, n\}\}$.

9. Soit Q_k un vecteur (non nul) engendrant la droite vectorielle $\ker(\alpha + k\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$. Appelons et c_k le coefficient dominant de Q_k (qui est donc non nul).

   On pose $P_k = \dfrac{1}{c_k}Q_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de sorte que P_k est unitaire et $\alpha(P_k) = -kP_k$.
   Supposons que R_k soit un polynôme vérifiant ces propriétés. En particulier $R_k \in \ker(\alpha + k\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$, donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $R_k = aQ_k$. Le coefficient dominant de R_k est 1 donc

$$a = \frac{1}{c_k} \quad \text{et} \quad R_k = P_k.$$

   Par conséquent, il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1 et vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.

10. Soit d le degré de P_k.
    Si k est non nul, on peut identifier les coefficients de degré k pour obtenir $-d = -k$ donc $d = k$.
    Pour $k = 0$ on a $\alpha(1) = 0$; par unicité, $P_0 = 1$, de degré 0.

11. On vient de voir que $P_0 = 1$.
    Soit $P = X + a$ un polynôme de degré 1 et de coefficient dominant 1. Comme $\alpha(P) = 1 - X$ on a $\alpha(P) = -P$ si et seulement si $a = -1$. Ainsi $P_1 = X - 1$.

    De même, on pose $P = X^2 + bX + c$. $P' = 2X + b$, $P'' = 2$ et $\alpha(P) = 2X + (1-X)(2X+b) = -2X^2 + (4-b)X + b$. Alors $\alpha(P) = -2P$ si et seulement si $4 - b = -2b$ et $b = -2c$ d'où $b = -4$ et $c = 2$. Il vient donc $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

II.3 - Orthogonalité de la famille $(P_0, \ldots, P_n)$

12. Par définition, $(\alpha(P)|Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (tP''(t) + (1-t)P'(t))Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Par croissance comparée, $\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} u(t)Q(t) = 0$ donc, une IPP donne :

$$(\alpha(P)|Q) = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

13. En procédant de même mais en partant de $(P|\alpha(Q))$ et en échangeant les rôles de P et Q, on obtient $(\alpha(P)|Q) = (P|\alpha(Q))$.

14. Soit k et ℓ deux entiers distincts de $\mathbb{R}_n[X]$.
D'après la question 13, $(\alpha(P_k)|P_\ell) = (P_k|\alpha(P_\ell))$ et, d'après la question 9, $-k(P_k|P_l) = -\ell(P_k|P_\ell)$; or $k \neq \ell$ donc $(P_k|P_\ell) = 0$.

    Conclusion. $(P_0, \cdots, P_n)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. Comme elle ne comporte pas le vecteur nul, elle est libre. De plus elle contient $n+1$ vecteurs donc c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie III - Méthode de quadrature de Gauss

15. Soit $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.
Sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on considère les applications $\Phi : P \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t}dt$ et $\psi : P \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i)$.
Ce sont sont des applications linéaires sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc elles sont égales si et seulement si elles coïncident sur tous les vecteurs de la base $(1, X, \cdots, X^{n-1})$.

    Pour $i \leqslant n-1$, on a : $\Phi(X^i) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^i\mathrm{e}^{-t}dt = i!$ et $\psi(X^i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^i$.
Pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, l'égalité $\Phi(X^i) = \psi(X^i)$ est équivalente au système :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}$$

16. La matrice $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$ est la matrice de Vandermonde associée aux réels $x_1, x_2, \cdots, x_n$ qui sont deux à deux distincts donc le déterminant de V est non nul. V est donc inversible et le système précédent admet une unique solution : il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant la relation $(*)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

17. Soit $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (X - x_i)^2$. On a $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ et, pour tout i, $P(x_i) = 0$ donc $\psi(P) = 0$.
Par contre, $t \mapsto P(t)\mathrm{e}^{-t}$ est continue positive et non identiquement nulle sur $[0; +\infty[$ donc $\Phi(P) > 0$.
Par conséquent : $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t}dt \neq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i)$.

Exercice 2 - Calcul d'un déterminant à l'aide d'un système orthogonal

Parties A - Définition et propriétés d'un système orthogonal

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. La famille $\gamma = (V_0, \ldots, V_n)$ est une famille orthogonale qui ne contient pas le polynôme nul, puisque pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$ le polynôme V_i est de degré i). Ainsi γ est une famille libre de $n+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est un espace de dimension $n+1$: γ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Comme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, d'après la question précédente, il existe $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$ dans $\mathbb{R}$ tels que $P = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k V_k$. Il vient alors :

$$(P \mid V_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \underbrace{(V_k \mid V_n)}_{=0} = 0.$$

3. • V_0 et W_0 engendrent tous les deux $\mathbb{R}_0[X]$ qui est de dimension 1 ; comme ils sont tous les deux untaires, ils sont égaux.

   • Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les vecteurs V_n et W_n sont tous les deux dans $\mathbb{R}_n[X]$ et orthogonaux à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ puisque ce dernier est engendré par $(W_0, \ldots, v_{n-1})$ et $(W_0, \ldots, W_{n-1})$. Mais l'orthogonal de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension 1, donc V_n et W_n sont colinéaires : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $W_n = \lambda V_n$. Comme V_n et W_n sont unitaires, il vient $\lambda = 1$ et ainsi $V_n = W_n$.

Parties B - Expression de $\det G_n$ à l'aide de la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$

4. • Soit $j \in \{1, \ldots, n+1\}$. Par définition de Q_n (attention au décalage d'indice !), on a :

$$V_{j-1} = \sum_{i=1}^{n+1} q_{i,j} X^{i-1}.$$

   Mais, comme V_{j-1} est de degré $j-1$, il vient $q_{i,j} = 0$ pour tout $i > j$: cela signifie exactement que la matrice Q_n est triangulaire supérieure.

   • Comme Q_n est triangulaire supérieure, $\det Q_n = \prod_{i=1}^{n+1} q_{i,i}$. Comme pour tout $i \in \{1, \ldots, n=1\}$ le polynôme V_{i-1} est unitaire ($i \in \{1, \ldots, n=1\}$), on a $q_{i,i} = 1$ et ainsi $\det Q_n = 1$.

5. Soit $(i,j) \in \{1, \ldots, n+1\}^2$. On a $(G_n Q_n)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n+1} (G_n)_{i,k} (Q_n)_{k,j}$ et ainsi :

$$\begin{aligned}
(Q_n^T G_n Q_n)_{i,j} &= \sum_{\ell=1}^{n+1} (Q_n^T)_{i,\ell} (G_n Q_n)_{\ell,j} = \sum_{\ell=1}^{n+1} (Q_n)_{\ell,i} \sum_{k=1}^{n+1} (G_n)_{\ell,k} (Q_n)_{k,j} \\
&= \sum_{\ell=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} q_{\ell,i} q_{k,j} \left\langle X^{k-1}, X^{\ell-1} \right\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n+1} q_{k,j} X^{k-1}, \sum_{\ell=1}^{n+1} q_{\ell,i} X^{\ell-1} \right\rangle \\
&= \langle V_{j-1}, V_{i-1}, = \rangle \, (G'_n)_{i,j}
\end{aligned}$$

   On a donc bien $Q_n^T G_n Q_n = G'_n$.

6. Selon la question précédente on a $\det(Q_n^T G_n Q_n) = \det G'_n$ donc :

$$\underbrace{(\det Q_n^T)}_{=\det Q_n = 1} (\det G_n) \underbrace{(\det Q_n)}_{=1} = \det G'_n$$

   Ainsi $\det G_n = \det G'_n = \prod_{i=1}^{n+1} (G'_n)_{i,i}$ puisque la matrice G'_n est diagonale (et oui, la famille γ est orthogonale !). On a donc :

$$\det G_n = \prod_{i=1}^{n+1} \langle V_{i-1}, V_{i-1} \rangle = \prod_{i=1}^{n+1} \|V_{i-1}\|^2 .$$