Aplatissement aléatoire d'un ensemble de points en grande dimension

Une correction

I. Préliminaires

I.A - *Projection sur un convexe fermé*

1. On a $\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\langle a, b\rangle$ et $\|a-b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\langle a, b\rangle$
Par somme, on obtient $\boxed{\text{l'identité du parallélogramme : } \|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2)}$
Géométriquement, dans un parallélogramme $(ABCD)$ (i.e. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$), on a
$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$$
2. On suppose que u, v et v' dans E vérifient $v \neq v'$ et $\|u-v\| = \|u-v'\|$.
On a alors $2\left\|u - \dfrac{v+v'}{2}\right\| = \|u-v+u-v'\|$, et en appliquant la question précédente il vient :
$$\|(u-v)+(u-v')\|^2 + \|v'-v\|^2 = 2\left(\|u-v\|^2 + \|u-v'\|^2\right) = 4\|u-v\|^2$$
Comme $v \neq v'$, on a $\|v'-v\|^2 > 0$ on obtient $\|(u-v)+(u-v')\| < 2\|u-v\|$ puisque la fonction $\sqrt{\cdot}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$
3. Puisque $F \neq \emptyset$, il existe $y \in F$. Posons :
$$K = F \bigcap B_f\left(u, \|u-y\|\right)$$
où $B_f\left(u, \|u-y\|\right)$ désigne la boule fermée de centre u est de rayon $\|u-y\|$.
L'ensemble K est un fermé dans E par intersection, non vide ($y \in K$) et borné puisque $K \subset B\left(u, \|u-y\|\right)$.
Comme E est dimension finie car euclidien, K est un compact.
De plus l'application $x \longmapsto \|u-x\|$ est continue sur K, ainsi par le théorème des bornes atteintes, cette application y admet un minimum en un certain $v \in K$
On a donc $\forall x \in K,\ \|u-v\| \leqslant \|u-x\| \leqslant \|u-y\|$ car $K \subset B\left(u, \|u-y\|\right)$
Enfin $(F \setminus K) \subset \left(E \setminus B\left(u, \|u-y\|\right)\right)$ et donc :
$$\forall x \in F \setminus K,\ \|u-v\| \leqslant \|u-y\| \leqslant \|u-x\|$$
Conclusion. Il existe bien v dans F tel que $\forall w \in F,\ \|u-v\| \leqslant \|u-w\|$
4. On suppose que C est un convexe fermé non vide de E et u est un vecteur de E.
L'existence voulue a été établie à la question 3.
On suppose qu'il existe $v \neq v'$ dans C tels que :
$$\forall w \in C,\ \|u-v\| \leqslant \|u-w\| \quad \text{et} \quad \forall w \in C,\ \|u-v'\| \leqslant \|u-w\|$$
On a alors $\|u-v\| = \|u-v'\|$, et on applique la question 2 : $\left\|u - \dfrac{v+v'}{2}\right\| < \|u-v\|$ or $\dfrac{v+v'}{2} \in C$ car C est convexe.
On obtient alors une contradiction avec le fait que :
$$\forall w \in C,\ \|u-v\| \leqslant \|u-w\|$$
Conclusion. Il existe un unique v dans C tel que : $\forall w \in C,\ \|u-v\| \leqslant \|u-w\|$.

I.B - Inégalité de Hölder pour l'espérance

Noter que pour $\alpha > 0$, la fonction $x \mapsto x^{\alpha}$ est prolongeable par continuité en 0.

5. — Si a ou b est nul alors $ab = 0 \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{a^q}{q}$.
   — Sinon, on a $\frac{1}{p} \in [0,1]$ et par concavité du logarithme sur $]0,+\infty[$, on a :

$$\frac{1}{p}\ln(a^p) + \left(1 - \frac{1}{p}\right)\ln(b^q) \leqslant \ln\left(\frac{1}{p}a^p + \left(1 - \frac{1}{p}\right)b^q\right)$$

   d'où $\ln(a \times b) \leqslant \ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right)$

   Comme exp est croissante, on peut conclure que :

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{a^q}{q}$$

6. *Comme l'univers est fini, les variables aléatoires admettent des moments de tout ordre.*
   Par positivité de l'espérance, on a : $\mathbb{E}(|X|^p) \geqslant 0$ et $\mathbb{E}(|Y|^q) \geqslant 0$

   — Premier cas. On suppose que $\mathbb{E}(|X|^p) = \mathbb{E}(|Y|^q) = 1$.
   D'après la question précédente on a :$|XY| \leqslant \frac{1}{p}|X|^p + \frac{1}{q}|Y|^q$.
   Ainsi, par croissance et linéarité de l'espérance, il vient $\mathbb{E}(|XY|) \leqslant \frac{1}{p}\mathbb{E}(|X|^p) + \frac{1}{q}\mathbb{E}(|Y|^q)$, donc :

$$\mathbb{E}(|XY|) \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \mathbb{E}(|X|^p)\mathbb{E}(|Y|^q)$$

   — Deuxième cas. On suppose que $\mathbb{E}(|X|^p) > 0$ et $\mathbb{E}(|Y|^q) > 0$.
   On pose $\lambda = \mathbb{E}(|X|^p)$ ainsi que : $X' = \frac{1}{\lambda^{1/p}}X$, $\mu = \mathbb{E}(|Y|^p)$, $Y' = \frac{1}{\mu^{1/q}}Y$.
   On a alors $\mathbb{E}(|X'|^p) = \mathbb{E}(|Y'|^q) = 1$ et on peut appliquer le premier cas aux variables aléatoires X' et Y' :

$$\mathbb{E}(|X'Y'|) \leqslant \mathbb{E}(|X'|^p)\mathbb{E}(|Y'|^q),$$

   ce qui donne : $\mathbb{E}(|XY|) \leqslant \lambda^{1/p}\mu^{1/q} = \mathbb{E}(|X|^p)^{1/p}\,\mathbb{E}(|Y|^q)^{1/q}$.

   — Troisième cas. On suppose que $\mathbb{E}(|X|^p) = 0$ ou $\mathbb{E}(|Y|^q) = 0$.
   Sans perte de généralité, on traite le cas $\mathbb{E}(|X|^p) = 0$. D'après le théorème de transfert on a

$$\sum_{x \in X(\Omega)} |x|^p \mathbb{P}(X = x) = 0,$$

   donc : $\forall x \in X(\Omega) \setminus \{0\},\ \mathbb{P}(X = x) = 0$ et ainsi X est nulle presque sûrement, donc il en va de même pour $|XY|$.
   Il en résulte que : $\mathbb{E}(|XY|) = 0 = \mathbb{E}(|X|^p)^{1/p}\,\mathbb{E}(|Y|^q)^{1/q}$.

   Conclusion. Dans tous les cas, on a : $\mathbb{E}(|XY|) \leqslant \mathbb{E}(|X|^p)^{1/p}\,\mathbb{E}(|Y|^q)^{1/q}$.

I.C - Espérance conditionnelle

7. Selon la formule des probabilités totales avec $(A_1, \ldots, A_m)$ un système complet d'événements de probabilités non nulles, on a : $\forall x \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = x) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}_{A_i}(X = x) \cdot \mathbb{P}(A_i)$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot \mathbb{P}(X = x) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{i=1}^{m} x \cdot \mathbb{P}_{A_i}(X = x)\mathbb{P}(A_i) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_i) \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}_{A_i}(X = x) \quad \text{(permutation de sommes finies))}
\end{aligned}$$

   Conclusion. $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{E}(X|A_i)$.

I.D - Variables aléatoires à queue sous-gaussienne

8. On pose $X^2(\Omega) = \{y_1, \dots, y_n\}$ où $n > 0$ et $0 \leqslant y_1 < y_2 < \cdots < y_n$ ainsi que $y_0 = 0$. Notons que :

$$\mathbb{R}^+ = \{0\} \bigsqcup \left(\bigsqcup_{i=0}^{n-1} \left]\sqrt{y_i}, \sqrt{y_{i+1}}\right] \right) \bigsqcup \left]\sqrt{y_n}, +\infty\right[\text{ (union disjointe)}$$

— Soit $i \in [\![0, n-1]\!]$. Supposons que $t \in \left]\sqrt{y_i}, \sqrt{y_{i+1}}\right]$. On a alors $y_i < t^2 \leqslant y_{i+1}$ donc $(|X| \geqslant t) = (X^2 \geqslant t^2) = (X^2 \geqslant y_{i+1})$ et ainsi $\mathbb{P}(|X| \geqslant t) = \mathbb{P}(X^2 \geqslant y_{i+1})$
Il en résulte que la fonction $t \longmapsto \mathbb{P}(|X| \geqslant t)$ est constante sur $\left]\sqrt{y_i}, \sqrt{y_{i+1}}\right]$
— De la même manière, la fonction $t \longmapsto \mathbb{P}(|X| \geqslant t)$ est constante égale à 0 sur $\left]\sqrt{y_n}, +\infty\right[$,
Ainsi la fonction $t \longmapsto t\mathbb{P}(|X| \geqslant t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Puis d'après la relation de Chasles, on a :

$$\begin{aligned} 2\int_0^{+\infty} t\mathbb{P}(|X| \geqslant t)\ \mathrm{d}t &= 2\left(\sum_{i=0}^{n-1} \int_{\sqrt{y_i}}^{\sqrt{y_{i+1}}} t\mathbb{P}(|X| \geqslant t)\ \mathrm{d}t\right) + 2\int_{\sqrt{y_n}}^{+\infty} t\mathbb{P}(|X| \geqslant t)\ \mathrm{d}t \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} 2\int_{\sqrt{y_i}}^{\sqrt{y_{i+1}}} t\mathbb{P}\left(X^2 \geqslant y_{i+1}\right)\ \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Or, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, on a

$$2\int_{\sqrt{y_i}}^{\sqrt{y_{i+1}}} t\mathbb{P}\left(X^2 \geqslant y_{i+1}\right)\ \mathrm{d}t = \left[t^2\mathbb{P}\left(X^2 \geqslant y_{i+1}\right)\right]_{t=\sqrt{y_i}}^{t=\sqrt{y_{i+1}}} = (y_{i+1} - y_i)\,\mathbb{P}\left(X^2 \geqslant y_{i+1}\right)$$

donc

$$\begin{aligned} 2\int_0^{+\infty} t\mathbb{P}(|X| \geqslant t)\ \mathrm{d}t &= \sum_{i=0}^{n-1} y_{i+1}\mathbb{P}\left(X^2 \geqslant y_{i+1}\right) - \sum_{i=0}^{n-1} y_i\mathbb{P}\left(X^2 \geqslant y_{i+1}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} y_i\mathbb{P}\left(X^2 \geqslant y_i\right) - \sum_{i=0}^{n-1} y_i\mathbb{P}\left(X^2 \geqslant y_{i+1}\right) \\ &= y_n \underbrace{\mathbb{P}\left(X^2 \leqslant y_n\right)}_{=\mathbb{P}(X^2=y_n)} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\mathbb{P}\left(X^2 \geqslant y_i\right) - y_0 \underbrace{\mathbb{P}\left(X^2 \geqslant y_0\right)}_{=0} - \sum_{i=1}^{n-1} y_i\mathbb{P}\left(X^2 \geqslant y_{i+1}\right) \\ &= y_n\mathbb{P}\left(X^2 = y_n\right) + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \underbrace{\left(\mathbb{P}\left(X^2 \geqslant y_i\right) - \mathbb{P}\left(X^2 \geqslant y_{i+1}\right)\right)}_{=\mathbb{P}(X^2=y_{i+1})} \\ &= y_n\mathbb{P}\left(X^2 = y_n\right) + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\mathbb{P}\left(X^2 = y_i\right) = \sum_{y \in X^2(\Omega)} y\mathbb{P}\left(X^2 = y\right) \end{aligned}$$

9. La fonction $t \longmapsto at\exp(-bt^2)$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$ (1)
Soit $A > 0$. On a : $2\int_0^A at\exp(-bt^2)\ \mathrm{d}t = \left[\frac{a}{-b}\exp(-bt^2)\right]_{t=0}^{t=A} = -\frac{a}{b}\exp(-bA^2) + \frac{a}{b} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{a}{2b}$, ce qui prouve l'intégrabilité de $t \longmapsto at\exp(-bt^2)$ sur $[0, +\infty[$ avec (1)
De plus pour tout $t \geqslant 0$ on a : $t\mathbb{P}(|X| \geqslant t) \leqslant at\exp(-bt^2)$
d'où

$$\mathbb{E}(X^2) = 2\int_0^{+\infty} t\mathbb{P}(|X| \geqslant t)\ \mathrm{d}t \leqslant 2\int_0^{+\infty} at\exp(-bt^2)\ \mathrm{d}t = \frac{a}{b}.$$

10. Soit $t \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $|x+\delta| \geqslant |x| + |\delta|$ selon l'inégalité triangulaire, donc :

$$\mathbb{P}(|X+\delta| \geqslant t) \leqslant \mathbb{P}(|X| \geqslant t - |\delta|).$$

11. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a :

$$a - \frac{t^2 b}{2} - \left(-b(t-|\delta|)^2\right) = \frac{t^2 b}{2} - 2b|\delta|t + a + b\delta^2 = b\frac{(t-2|\delta|)^2}{2} + a - b\delta^2 \geqslant 0$$

comme $b|\delta|^2 \leqslant a$, ceci prouve que : $\boxed{-b(t-|\delta|)^2 \leqslant a - \frac{t^2 b}{2}}$

12. Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $t \geqslant |\delta|$.
En servant de la question 10 puis de l'hypothèse (car $t - |\delta| \geqslant 0$), on a :

$$\mathbb{P}(|X+\delta| \geqslant t) \leqslant \mathbb{P}(|X| \geqslant t - |\delta|) \leqslant a \exp\left(-b(t-|\delta|)^2\right).$$

Puis en utilisant la croissance de l'exponentielle et la question 11, on obtient :

$$\mathbb{P}(|X+\delta| \geqslant t) \leqslant a \exp(a - bt^2/2) = a\exp(a)\exp(-\frac{1}{2}bt^2).$$

13. Si $0 \leqslant t < |\delta|$, on a $t^2 \leqslant \delta^2 \leqslant \frac{a}{b}$ donc $-\frac{1}{2}bt^2 \geqslant -\frac{a}{2}$ et ainsi :

$$a\exp(a)\exp(-\frac{1}{2}bt^2) \geqslant a\exp(a)\exp(-\frac{a}{2})a = a\exp(\frac{a}{2}).$$

D'après l'inégalité sous-gaussienne en $t = 0$, on a $1 = \mathbb{P}(|X| \geqslant 0) \leqslant a\exp(0) = a$ d'où :

$$a\exp(a)\exp(-\frac{1}{2}bt^2) \geqslant 1\exp(1/2) \geqslant 1 \geqslant \mathbb{P}(|X+\delta| \geqslant t)$$

Conclusion. L'inégalité de la question 12 reste valable si $0 \leqslant t < |\delta|$.

II. L'inégalité de concentration de Talagrand

II.A - Étude de deux cas particuliers

14. On suppose que C est un convexe fermé ne rencontrant pas $X(\Omega)$. Ainsi $(X \in C)$ est l'événement impossible et dans ce cas on a :

$$\mathbb{P}(X \in C)\ \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) = 0 \leqslant 1.$$

15. On pose $u = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i e_i$ (décomposition de u dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$).
Par expression de la norme en base orthonormée, il vient l'égalité de fonctions :

$$\frac{1}{4}d(X,u)^2 = \frac{\|X-u\|^2}{4} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(\varepsilon_i - u_i)^2}{4}.$$

Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Posons $Y_i = \frac{(\varepsilon_i - u_i)^2}{4}$. Comme $u_i \in \{-1,1\}$ et que ε_i est à valeurs dans $\{-1,1\}$, alors Y_i est à valeurs dans $\{0,1\}$. De plus $\mathbb{P}(Y_i = 0) = \frac{1}{2}$ et Y_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.

Ainsi $\frac{1}{4}d(X,u)^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$ où les Y_i sont indépendants dans leur ensemble via le lemme des coalitions, ce qui permet de conclure que $\frac{1}{4}d(X,u)^2$ suit une loi binomiale de paramètres n et $1/2$.

16. D'après ce qui précède $\frac{1}{4}d(X,u)^2$ est à valeurs dans $[\![0,n]\!]$ et pour tout k dans $[\![0,n]\!]$ on a :

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{4}d(X,u)^2 = k\right) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}.$$

En utilisant la formule de transfert avec $\exp\left(\frac{1}{8}d(X,u)^2\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\left(d(X,u)^2/4\right)\right)$, il vient :

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,u)^2\right)\right) = \sum_{k=0}^{n}\exp(k/2)\frac{\binom{n}{k}}{2^n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \left(\frac{\sqrt{\mathrm{e}}+1}{2}\right)^n$$

Comme $2 \leqslant \mathrm{e} \leqslant 3$, on a $0 \leqslant \frac{\sqrt{\mathrm{e}}+1}{2} \leqslant 2$ et ainsi : $\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,u)^2\right)\right) \leqslant 2^n$.

17. On a $\boxed{d(X,C) = \inf_{v\in C} d(X,v) \leqslant d(X,u)}$

De plus comme $X(\Omega)\bigcap C = \{u\}$, on a $(X \in C) = (X = u) = \bigcap_{i=1}^{n}(\varepsilon_i = u_i)$ en reprenant les notations introduites à la question 15.

Ainsi, par indépendance mutuelle des ε_i, on a : $\mathbb{P}(X \in C) = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(\varepsilon_i = u_i) = \frac{1}{2^n}$.

Comme les facteurs sont positifs et à l'aide de la question 16 :

$$\mathbb{P}(X \in C)\ \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) \leqslant 1.$$

II.B - Initialisation

18. Pour le cas $n = 1$, on identifie E à $\mathbb{R}$ et X à ε_1, qui suit donc une loi de Rademacher
Ainsi $X(\Omega) = \{-1,1\}$ et, comme $C \cap X(\Omega)$ contient au moins deux éléments, on a $X(\Omega) = \{-1,1\} = C \cap X(\Omega) \subset C$, donc $(X \in C) = \Omega$ est l'événement certain donc la variable aléatoire (exp $\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)$ est presque sûrement constante égale 1.

II.C - Propriétés de C_{+1} et C_{-1}

19. Soit $x' \in E'$ et $t \in \{1,-1\}$.

$\Leftarrow$ On suppose que : $x' + te_n \in C$. On a donc $x' + te_n \in C \cap H_t$ car $x' \in E'$.
Comme π est une projection et que $x' \in E' = \operatorname{Im}\pi$, on a $\pi(x') = x'$.
Comme $\ker(\pi) = \operatorname{vect}(e_1,\ldots,e_{n-1})^\perp = \operatorname{vect}(e_n)$, on a $\pi(e_n) = 0$.
Par linéarité $\pi(x' + te_n) = x'$ d'où $x' \in \pi(C \cap H_t) = C_t$.

$\Rightarrow$ On suppose que : $x' \in C_t = \pi(C \cap H_t)$. Ceci nous fournit $y \in C \cap H_t$ tel que $x' = \pi(y)$ et on écrit $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ où les $y_i \in \mathbb{R}$

Il vient donc $x' = \pi(y) = \sum_{i=1}^{n-1} y_i e_i$, et comme $y \in H_t$, on a $y - te_n = \sum_{i=1}^{n-1} y_i e_i + (y_n - t)e_n \in E'$ ce qui permet de dire que $(y_n - t)e_n \in E'$, donc $y_n = t$, et ainsi $x' + te_n = y \in C$

20. • Par définition, on a $C_1 \subset \operatorname{Im}(\pi) = E'$. De même pour C_{-1}.

• Par hypothèse, $C \cap X(\Omega)$ contient au moins deux vecteurs qui diffèrent par leur dernière coordonnée.

Ceci nous fournit $y = \sum_{i=1}^{n-1} y_i e_i + e_n \in C \cap X(\Omega)$ et $z = \sum_{i=1}^{n-1} z_i e_i - e_n \in C \cap X(\Omega)$ où les y_i et les z_i sont réels.

On note $y' = \sum_{i=1}^{n-1} y_i e_i \in E'$ et $z' = \sum_{i=1}^{n-1} z_i e_i \in E'$.

En utilisant la réciproque de la question précédente, on a $y' \in C_{+1}$ et $z' \in C_{-1}$ donc

$$C_{+1} \neq \emptyset \ \text{ et } \ C_{-1} \neq \emptyset.$$

• Montrons que C_{+1} est convexe (et ce sera analogue pour C_{-1}). Soient $x, y \in C_{+1}$ et $\lambda \in [0,1]$. On a x et $y \in E'$ donc

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in E'$$

car E' est un sous-espace vectoriel. De plus $\lambda x + (1-\lambda)y + e_n = \lambda(x+e_n) + (1-\lambda)(y+e_n)$. En utilisant le sens direct de la question 19,il vient $x + e_n \in C$ et $y + e_n \in C$.
Comme C est convexe, on a donc $\lambda x + (1-\lambda)y + e_n \in C$ d'où $\lambda x + (1-\lambda)y \in C_1$ par la réciproque de la question 19.

• Montrons que C_{+1} est fermé de E' (et ce sera analogue pour C_{-1}).
Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans C_{+1} qui converge vers $\ell \in E'$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on a comme ci-dessus $u_k + e_n \in C$ or par somme $(x_k + e_n)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell + e_n$. Comme C est fermé de E, on a $\ell + e_n \in C$, comme $\ell \in E'$, on a bien $\ell \in C_{+1}$ d'après la question 19.

Conclusion. $\boxed{C_{+1} \text{ et } C_{-1} \text{ sont des convexes fermés non vides de } E'}$

21. Les événements $(\varepsilon_n = 1)$ et $(\varepsilon_n = -1)$ forment un système complet d'événements de probabilités $1/2$ donc selon la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(X \in C) = \mathbb{P}\left(X \in C, \varepsilon_n = 1)\right) + \mathbb{P}\left(X \in C, \varepsilon_n = -1\right)$$

Soit $\omega \in \Omega$. Soit $t \in \{-1, 1\}$.
On a $X(\omega) = X'(\omega) + \varepsilon_n(\omega)e_n$ et $X'(\omega) \in E'$ et $\varepsilon_n(\omega) \in \{-1, 1\}$ donc d'après Q19 :

$$\begin{cases} X(\omega) \in C \\ \varepsilon_n(\omega) = t \end{cases} \iff \begin{cases} X'(\omega) \in C_t \\ \varepsilon_n(\omega) = t \end{cases}$$

Ainsi $\mathbb{P}(X \in C) = \mathbb{P}\left(X' \in C_{+1}, \varepsilon_n = 1)\right) + \mathbb{P}\left(X' \in C_{-1}, \varepsilon_n = -1\right)$

Comme $X' = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i e_i$ et ε_n sont des variables aléatoires indépendantes par le lemme des coalitions, il vient :

$$\mathbb{P}(X \in C) = \mathbb{P}\left(X' \in C_{+1}\right)\mathbb{P}\left(\varepsilon_n = 1\right) + \mathbb{P}\left(X' \in C_{-1}\right)\mathbb{P}\left(\varepsilon_n = -1\right)$$

Conclusion. $\boxed{\mathbb{P}(X \in C) = \dfrac{1}{2}\mathbb{P}(X' \in C_{+1}) + \dfrac{1}{2}\mathbb{P}(X' \in C_{-1})}$

II.D - Une inégalité cruciale

22. Soit $\omega \in \Omega$. On a $Y_{\varepsilon_n(\omega)}(\omega) \in C_{\varepsilon_n(\omega)}$ donc $Y_{\varepsilon_n(\omega)}(\omega) + \varepsilon_n e_n(\omega) \in C$ d'après la question 19. De même $Y_{-\varepsilon_n(\omega)}(\omega) - \varepsilon_n e_n(\omega) \in C$, donc :

$$(1-\lambda)\left(Y_{\varepsilon_n(\omega)}(\omega) + \varepsilon_n e_n(\omega)\right) + \lambda\left(Y_{-\varepsilon_n(\omega)}(\omega) - \varepsilon_n e_n(\omega)\right) \in C$$

car C convexe et $\lambda \in [0,1]$. Ainsi :

$$d(X(\omega), C) \leqslant \|(1-\lambda)\left(Y_{\varepsilon_n(\omega)}(\omega) + \varepsilon_n e_n(\omega)\right) + \lambda\left(Y_{-\varepsilon_n(\omega)}(\omega) - \varepsilon_n e_n(\omega)\right) - X(\omega)\|$$

23. • On a $X = X' + \varepsilon_n e_n$ donc $(1-\lambda)(Y_{\varepsilon_n} + \varepsilon_n e_n) + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - \varepsilon_n e_n) - X = (1-\lambda)(Y_{\varepsilon_n} - X') + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - X' - 2\varepsilon_n e_n)$ et ainsi

$$(1-\lambda)(Y_{\varepsilon_n} + \varepsilon_n e_n) + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - \varepsilon_n e_n) - X = (1-\lambda)(Y_{\varepsilon_n} - X') + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - X') - 2\lambda\varepsilon_n e_n.$$

La variable aléatoire $2\lambda\varepsilon_n e_n$ est à valeurs dans $\text{vect}(e_n)$ et $(1-\lambda)(Y_{\varepsilon_n} - X') + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - X')$ à valeurs dans E'. Or $E' \perp \text{vect}(e_n)$ et $\|e_n\| = 1$ donc selon le théorème de Pythagore :

$$\|(1-\lambda)(Y_{\varepsilon_n} + \varepsilon_n e_n) + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - \varepsilon_n e_n) - X\|^2 = 4\lambda^2 + \|(1-\lambda)(Y_{\varepsilon_n} - X') + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - X')\|^2$$

On en déduit avec la question précédente que :

$$d(X, C)^2 \leqslant 4\lambda^2 + \|(1-\lambda)(Y_{\varepsilon_n} - X') + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - X')\|^2$$

• Soit u et $v \in E$. Montrons que pour tout $t \in [0,1]$ on a $(1-t)\|u\|^2 + t\|v\|^2 \geqslant \|(1-t)u + tv\|^2$

Je pose $P : t \mapsto (1-t)\|u\|^2 + t\|v\|^2 - \|(1-t)u + tv\|^2$.
Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $P(t) = \left((1-t) - (1-t)^2\right)\|u\|^2 + \left(t - t^2\right)\|v\|^2 - 2t(1-t)\langle u, v\rangle$ donc

$$P(t) = t(1-t)\left[\|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u, v\rangle\right] = t(1-t)\|u-v\|^2$$

d'où pour tout $t \in [0,1]$ on a : $P(t) \geqslant 0$.

En appliquant ceci à $t = \lambda$, $u = Y_{\varepsilon_n(\omega)}(\omega) - X'(\omega)$ et $v = Y_{-\varepsilon_n(\omega)}(\omega) - X'(\omega)$ pour $\omega \in \Omega$ on obtient :

$$d(X,C)^2 \leqslant 4\lambda^2 + \|(1-\lambda)(Y_{\varepsilon_n} - X') + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - X')\|^2 \leqslant 4\lambda^2 + (1-\lambda)\|Y_{\varepsilon_n} - X'\|^2 + \lambda\|Y_{-\varepsilon_n} - X'\|^2$$

II.E - Espérances conditionnelles

24. Comme $C \cap X(\Omega)$ contient au moins deux vecteurs qui diffèrent par leur dernière coordonnée, ceci nous fournit $x' = \sum_{i=1}^{n-1} x_i e_i \in E'$ tel que $\{x' + e_n, x' - e_n\} \subset C \cap X(\Omega)$.

Ainsi d'après la question 19, $x' \in C_{-1}$ et donc $(X' = x') \subset (X' \in C_{-1})$. Comme $(X' = x') = \bigcap_{i=1}^{n-1} (\varepsilon_i = x_i)$, par indépendance des ε_i, on a :

$$\mathbb{P}(X' = x') = \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(\varepsilon_i = x_i) = \frac{1}{2^{n-1}}$$

et ainsi $\mathbb{P}(X' \in C_{-1}) \geqslant \mathbb{P}(X' = x') > 0$ d'où $\boxed{p_- > 0}$.

25. • On va utiliser les deux résultats suivants.

Résultat 1. *Soit X et Y deux variables aléatoires réelles, $f : \mathbb{R} \times Y(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}$ tels que $\mathbb{P}(Y = k) > 0$. On a :*

$$\mathbb{E}(f(X,Y)|Y = k) = \mathbb{E}(f(X,k)|Y = k)$$

Démontrons cela. Soit $z \in f(X,Y)(\Omega)$.

<u>Premier cas</u>. On suppose $\forall x \in X(\omega),\ \ z \neq f(x,k)$ donc $g_z = \{x \in X(\omega)\}\, z = f(x,k) = \emptyset$ alors $\mathbb{P}_{(Y=k)}\left(f(X,Y) = z\right) = \dfrac{\mathbb{P}\left(f(X,Y) = z, Y = k\right)}{\mathbb{P}(Y = k)} = 0 =$.

<u>Deuxième cas</u>. On suppose $g_z = \{x \in X(\omega)\}\, z = f(x,k)$ non vide i.e. $z \in f(X,k)$. On a alors

$$\left(f(X,Y) = z, Y = k\right) = \bigsqcup_{x \in g_z} \left(X = x, Y = k\right),$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{(Y=k)}\left(f(X,Y) = z\right) &= \sum_{x \in g_z} \frac{\mathbb{P}\left(X = x, Y = k\right)}{\mathbb{P}(Y = k)} \\
&= \frac{\mathbb{P}\left(f(X,Y) = z, Y = k\right)}{\mathbb{P}(Y = k)} \\
&= \mathbb{P}_{(Y=k)}\left(f(X,k) = z\right)
\end{aligned}$$

On conclut avec la définition :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f(X,Y)|Y = k) &= \sum_{z \in f(X,Y)(\Omega)} z\mathbb{P}_{(Y=k)}\left(f(X,Y) = z\right) \\
&= \sum_{z \in f(X,k)(\Omega)} z\mathbb{P}_{(Y=k)}\left(f(X,k) = z\right) \\
&= \mathbb{E}(f(X,k)|Y = k)
\end{aligned}$$

Résultat 2. *Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes et $k \in \mathbb{R}$ tels que $\mathbb{P}(Y = k) > 0$. On a :*

$$\mathbb{E}(X|Y=k) = \mathbb{E}(X)$$

Il suffit d'utiliser la définition de l'espérance conditionnelle et de remarquer que $\mathbb{P}_{(Y=k)}(X = x) = \mathbb{P}(X = x)$

- Soit λ dans $[0,1]$. On a d'après la question 23 on a :

$$\exp\left(\frac{d(X,C)^2}{8}\right) \leqslant \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\left(\exp\left(\frac{d(X',C_{\varepsilon_n})^2}{8}\right)\right)^{1-\lambda}\left(\exp\left(\frac{d(X',C_{-\varepsilon_n})^2}{8}\right)\right)^{\lambda} \quad (\star)$$

D'après le résultat 1 on a :

$$\mathbb{E}\left(\left(\exp\left(\frac{d(X',C_{\varepsilon_n})^2}{8}\right)\right)^{1-\lambda}\left(\exp\left(\frac{d(X',C_{-\varepsilon_n})^2}{8}\right)\right)^{\lambda}|\varepsilon_n=-1\right) =$$

$$\mathbb{E}\left(\left(\exp\left(\frac{d(X',C_{-1})^2}{8}\right)\right)^{1-\lambda}\left(\exp\left(\frac{d(X',C_{1})^2}{8}\right)\right)^{\lambda}|\varepsilon_n=-1\right)$$

Avec le lemme des coalitions, les variables aléatoires ε_n et $\left(\exp\left(\frac{d(X',C_{-1})^2}{8}\right)\right)^{1-\lambda}\cdot\left(\exp\left(\frac{d(X',C_1)^2}{8}\right)\right)^{\lambda}$ sont indépendantes car ε_n et de X' le sont ; puis le résultat 2 donne :

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{d(X',C_{-1})^2}{8}\right)^{1-\lambda}\exp\left(\frac{d(X',C_1)^2}{8}\right)^{\lambda}|\varepsilon_n=-1\right) = \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{d(X',C_{-1})^2}{8}\right)^{1-\lambda}\exp\left(\frac{d(X',C_1)^2}{8}\right)^{\lambda}\right)$$

À l'aide de $(\star)$, de la croissance et la linéarité de l'espérance conditionnelle, on obtient :

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{d(X,C)^2}{8}\right)|\varepsilon_n=-1\right) \leqslant \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\mathbb{E}\left(\left(\exp\left(\frac{d(X',C_{-1})^2}{8}\right)\right)^{1-\lambda}\left(\exp\left(\frac{d(X',C_1)^2}{8}\right)\right)^{\lambda}\right)$$

26. On suppose $\lambda \in]0,1[$. On pose $p = \dfrac{1}{1-\lambda}$ et $q = \dfrac{1}{\lambda}$ de sorte que $p > 0, q > 0$ et $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$
D'après la question 6, pour Y et Z variables positives, on a $Y^{1/p} = \left|Y^{1/p}\right|$ et $Z^{1/q} = \left|Z^{1/q}\right|$:

$$\mathbb{E}\left(Y^{1/p}Z^{1/q}\right) \leqslant \mathbb{E}\left(\left(Y^{1/p}\right)^p\right)^{1/p}\mathbb{E}\left(\left(Z^{1/q}\right)^q\right)^{1/q} = \mathbb{E}(Y)^{1/p}\,\mathbb{E}(Z)^{1/q}$$

donc

$$\mathbb{E}\left(Y^{1-\lambda}Z^{\lambda}\right) \leqslant \mathbb{E}(Y)^{1-\lambda}\,\mathbb{E}(Z)^{\lambda}$$

En appliquant ceci au résultat de la question 25, on obtient pour tout $\lambda \in]0,1[$:

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{d(X,C)^2}{8}\right)|\varepsilon_n=-1\right) \leqslant \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\left(\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{d(X',C_{-1})^2}{8}\right)\right)\right)^{1-\lambda}\cdot\left(\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{d(X',C_1)^2}{8}\right)\right)\right)^{\lambda}$$

Or $\lambda \longmapsto \exp\left(\dfrac{\lambda^2}{2}\right)\left(\mathbb{E}\left(\exp\left(\dfrac{d(X',C_{-1})^2}{8}\right)\right)\right)^{1-\lambda}\cdot\left(\mathbb{E}\left(\exp\left(\dfrac{d(X',C_1)^2}{8}\right)\right)\right)^{\lambda}$ est continue sur $[0,1]$
On déduit en passant à la limite en 0 et 1 que pour tout $\lambda \in [0,1]$, on a :

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{d(X,C)^2}{8}\right)|\varepsilon_n=-1\right) \leqslant \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\left(\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{d(X',C_{-1})^2}{8}\right)\right)\right)^{1-\lambda}\cdot\left(\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{d(X',C_1)^2}{8}\right)\right)\right)^{\lambda}$$

27. On utilise la question précédente en $\lambda = 0$, on échange $+1$ et -1 qui jouent des rôles symétriques car on ne s'est pas servi de $p_- \leqslant p_+$ puis on multiplie par $p_+ \geqslant 0$ pour obtenir :

$$p_+\cdot\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{d(X,C)^2}{8}\right)|\varepsilon_n=1\right) \leqslant p_+\cdot\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{d(X',C_1)^2}{8}\right)\right)$$

On a donc : $p_+ \cdot \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{d(X',C_1)^2}{8}\right)\right) = \mathbb{P}\left(X' \in C_1\right) \cdot \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{d(X',C_1)^2}{8}\right)\right)$.

or $X' = \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i e_i$ est à valeurs dans l'espace euclidien E' de dimension $n-1$ de base orthonormée $(e_1, \dots, e_{n-1})$, C_1 est un convexe fermé non vide de E' et les ε_i sont indépendantes et suivent la loi de Rademacher d'où par hypothèse de récurrence, on peut appliquer (II.1) :

$$p_+ \cdot \left(\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{d(X',C_1)^2}{8}\right)\right)\right) \leqslant 1$$

Enfin comme $p_+ > 0$ selon la question 24 (p_+ et p_- jouant des rôles symétriques), on a alors :

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)|\varepsilon_n = 1\right) \leqslant \frac{1}{p_+}$$

28. On utilise la formule des probabilités totales sur les espérances conditionnelles de la question 7 avec le système complet d'événements $(\varepsilon_n = t)_{t\in\{-1,1\}}$: donc

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) = \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\middle|\varepsilon_n = 1\right) + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\middle|\varepsilon_n = -1\right)$$

Soit λ dans $[0,1]$. On applique les deux questions précédentes :

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_+} + \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\left(\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{d(X',C_{-1})^2}{8}\right)\right)\right)^{1-\lambda}\left(\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{d(X',C_1)^2}{8}\right)\right)\right)^{\lambda}\right)$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence comme à la question précédente on a :

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{d(X',C_{-1})^2}{8}\right)\right) \leqslant \frac{1}{p_-} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{d(X',C_1)^2}{8}\right)\right) \leqslant \frac{1}{p_+}$$

Conclusion. Pour tout λ dans $[0,1]$:

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_+} + \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\frac{1}{(p_-)^{1-\lambda}} \cdot \frac{1}{(p_+)^{\lambda}}\right)$$

II.F - Optimisation

29. On a $\lambda = 1 - \frac{p_-}{p_+} \in [0,1]$ car $0 < p_- \leqslant p_+$ donc d'après la question 28 :

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) \leqslant \frac{1}{2p_+}\left(1 + \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\left(\frac{p_+}{p_-}\right)^{1-\lambda}\right)$$

or $(1-\lambda)^{\lambda-1} = \left(\frac{p_-}{p_+}\right)^{\lambda-1} = \left(\frac{p_+}{p_-}\right)^{1-\lambda}$

Conclusion. $\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) \leqslant \frac{1}{2p_+}\left(1 + \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)(1-\lambda)^{\lambda-1}\right)$.

30. On pose $g : x \longmapsto \ln(2+x) - \ln(2-x) - \frac{x^2}{2} - (x-1)\ln(1-x)$ qui est C^∞ sur $[0,1[$ par théorèmes généraux.
Soit $x \in [0,1[$, on a $g'(x) = \frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x} - x - 1 - \ln(1-x)$ et

$$g''(x) = \frac{1}{(2-x)^2} - \frac{1}{(2+x)^2} - 1 + \frac{1}{1-x} = \frac{8x}{(2-x)^2(2+x)^2} + \frac{x}{1-x} \geqslant 0$$

Ainsi g' est strictement croissante sur $[0,1[$
et comme $g'(0) = 0$ on a : $\forall x \in [0,1[\,,\ g'(x) \geqslant 0$.
Il en résulte que g est croissante sur $[0,1[$ et comme $g(0) = 0$, on a : $\forall x \in [0,1[\,,\ g(x) \geqslant 0$.

Conclusion. Pour tout $x \in [0,1[$, $\frac{x^2}{2} + (x-1)\ln(1-x) \leqslant \ln(2+x) - \ln(2-x)$.

31. Soit $x \in [0,1[$. En appliquant l'exponentielle à l'inégalité précédente, on obtient :

$$\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)(1-x)^{x-1} \leqslant \frac{2+x}{2-x}$$

d'où $\boxed{1+\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)(1-x)^{x-1} \leqslant \frac{4}{2-x}}$.

32. En utilisant la question précédente et la question 29, et comme $\lambda \in [0,1[$ car $\lambda = 1 - \frac{p_-}{p_+}$ et $0 < p_- \leqslant p_+$, on a :

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) \leqslant \frac{1}{2p_+}\frac{4}{2-\lambda}$$

Or $p_+(2-\lambda) = p_+\left(1+\frac{p_-}{p_+}\right) = p_+ + p_-$ d'où : $\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) \leqslant \frac{2}{p_+ + p_-}$.

Ainsi, comme $\frac{2}{p_+ + p_-} > 0$, on a $\frac{p_+ + p_-}{2}\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) \leqslant 1$

À l'aide de la question 21, par définition de p_+ et p_-, on a :

$$\mathbb{P}(X \in C) \cdot \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) \leqslant 1 \tag{II.1}$$

on vient de terminer l'hérédité (commencée en IIC) de notre démonstration par récurrence dans le cas où $C \cap X(\omega)$ contient au moins deux éléments

mais la formule reste vraie si $C \cap X(\omega)$ a au plus un élément d'après IIA

De plus l'initialisation a été traitée en IIA ou IIB selon le cardinal de $C \cap X(\omega)$

Ainsi $\boxed{\text{l'inégalité (II.1) a été démontrée par récurrence}}$

II.G - Inégalité de Talagrand

33. Soit C convexe fermé non vide de E et t réel strictement positif. D'après ce qui précède on a

$$\mathbb{P}(X \in C) \cdot \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{d(X,C)^2}{8}\right)\right) \leqslant 1 \tag{II.1}$$

or par croissance sur $\mathbb{R}^+$ de $x \mapsto \exp\left(\frac{x^2}{8}\right)$, on a :

$$\mathbb{P}\left(d(X,C) \geqslant t\right) = \mathbb{P}\left(\exp\left(\frac{d(X,C)^2}{8}\right) \geqslant \exp\left(\frac{t^2}{8}\right)\right)$$

En appliquant l'inégalité de Markov avec la variable aléatoire positive $\exp\left(\frac{d(X,C)^2}{8}\right)$ et $\exp\left(\frac{t^2}{8}\right) > 0$ on a :

$$\exp\left(\frac{t^2}{8}\right)\mathbb{P}\left(d(X,C) \geqslant t\right) \leqslant \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{d(X,C)^2}{8}\right)\right)$$

Ainsi : $\mathbb{P}(X \in C) \cdot \exp\left(\frac{t^2}{8}\right)\mathbb{P}\left(d(X,C) \geqslant t\right) \leqslant \mathbb{P}(X \in C)\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{d(X,C)^2}{8}\right)\right) \leqslant 1$.

On en déduit l'inégalité de Talagrand :

Pour tout C convexe fermé non vide de E et pour tout réel t strictement positif $$\mathbb{P}(X \in C) \cdot \mathbb{P}(d(X,C) \geqslant t) \leqslant \exp\left(-\frac{t^2}{8}\right)$$

III. Démonstration du théorème de Johnson-Lindenstrauss

III.A - Une inégalité de concentration

34. • L'application $M \in \mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R}) \mapsto M \cdot u$ est linéaire donc continue car $\dim\left(\mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})\right) = kd < \infty$
Donc par composition g est continue sur $\mathcal{M}_{k,d}$ or $[0, r]$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$
donc $C = g^{-1}\left([0, r]\right)$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$.

   • Soient M et $N \in C$ et $\lambda \in [0, 1]$.
À l'aide de l'inégalité triangulaire et l'homogénéité, on a

$$g(\lambda M + (1-\lambda)N) = \|\lambda M \cdot u + (1-\lambda)N \cdot u\| \leqslant \lambda\|M \cdot u\| + (1-\lambda)\|N \cdot u\| \leqslant (\lambda + 1 - \lambda)r = r$$

   d'où $\lambda M + (1-\lambda)N \in C$.

   Conclusion. $C = \{M \in \mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R}) \mid \; g(M) \leqslant r\}$ est une partie convexe et fermée de $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$.

35. Soit $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k \\ 1 \leqslant j \leqslant d}}$ dans $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$. On a $\|M \cdot u\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{d} m_{i,j}u_j\right)^2 = \sum_{i=1}^{k}\left|\sum_{j=1}^{d} m_{i,j}u_j\right|^2$
On applique k fois Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^d$, ce qui donne :

$$\|M \cdot u\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{k}\left(\left(\sum_{j=1}^{d} m_{i,j}^2\right) \times \left(\sum_{j=1}^{d} u_j^2\right)\right)$$

   Comme $\displaystyle\sum_{j=1}^{d} u_j^2 = \|u\|^2 = 1$ on a : $\|M \cdot u\|^2 \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{d} m_{i,j}^2$.

   Conclusion. $\boxed{\|M \cdot u\| \leqslant \|M\|_F}$.

36. Soit M dans $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$ telle que $d(M, C) < t$
On a $0 \in C$ donc selon la question 34, C est une partie fermée convexe non vide de l'espace euclidien $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$.
Ceci nous fournit donc $V \in C$ tel que $d(M, C) = \|M - V\|_F$ et donc $\|M - V\|_F < t$
On a $g(M) = \|M \cdot u\| = \|(M - V) \cdot u + V \cdot u\| \leqslant \|(M - V) \cdot u\| + \|V \cdot u\|$
Ainsi selon l'inégalité triangulaire et la question précédente : $g(M) \leqslant \|M - V\|_F + r$ car $V \in C$ d'où $g(M) < r + t$.

   Conclusion. $\boxed{\text{pour toute matrice } M \text{ dans } \mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R}),\ d(M, C) < t \Rightarrow g(M) < r + t}$.

37. On peut appliquer le théorème de Talagrand avec l'espace euclidien $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$ de dimension kd muni de la base canonique orthonormée $(E_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k \\ 1 \leqslant j \leqslant d}}$, la variable $X = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k \\ 1 \leqslant j \leqslant d}} \varepsilon_{i,j}E_{i,j}$ où les $\varepsilon_{i,j}$ sont mutuellement indépendantes suivant une loi de Rademacher et C convexe fermé non vide de $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$:

$$\mathbb{P}(X \in C) \cdot \mathbb{P}(d(X, C) \geqslant t) \leqslant \exp\left(-\frac{t^2}{8}\right)$$

   Or $(X \in C) = (g(X) \leqslant r)$ par définition de C et $(g(X) \geqslant r + t) \subset (d(X, C) \geqslant t)$ par contraposée de la question 36.

   Conclusion. $\boxed{\mathbb{P}(g(X) \leqslant r) \cdot \mathbb{P}(g(X) \geqslant r + t) \leqslant \exp\left(-\frac{t^2}{8}\right)}$

III.B - Médianes

38. On considère la fonction G de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel t, $G(t) = \mathbb{P}(g(X) \leqslant t)$.
Comme Ω est fini, $g(X)$ prend un nombre fini de valeurs, on peut alors noter $g(X) = \{y_1, \dots y_n\}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $y_1 < \cdots < y_n$.
Notons que G est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$ avec :
$$\begin{cases} \forall t < y_1, G(t) = 0 \\ \forall t \geqslant y_n,\ G(t) = 1 \\ G \text{ est constante sur chaque } [y_i, y_{i+1}[\text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant n-1. \end{cases}$$
On note $y_0 = y_1 - 1$. La suite $(G(y_i))_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est croissante avec $G(y_0) = 0$ et $G(y_n) = 1$
On peut alors poser correctement $j = \min \{i \in [\![1, n]\!]\} \dfrac{1}{2} \leqslant G(y_i)$ et on a $G(y_{j-1}) < \dfrac{1}{2} \leqslant G(y_j)$
En posant $m = y_j$, on a $\mathbb{P}(g(X) \leqslant m) = G(m) = G(y_j) \geqslant \dfrac{1}{2}$ et $G(y_{j-1}) < \dfrac{1}{2}$ donc $\mathbb{P}(g(X) > y_{j-1}) = 1 - G(y_{j-1}) > \dfrac{1}{2}$
Comme $m = y_j > y_{j-1}$, il vient $(g(X) > y_{j-1}) = (g(X) \geqslant m)$ et $\mathbb{P}(g(X) \geqslant m) \geqslant \dfrac{1}{2}$.
Conclusion. $\boxed{g(X) \text{ admet au moins une médiane}}$

39. Soit $t > 0$. En appliquant la question 37 à $r = m$ puis $r = m - t$, on a :
$$\mathbb{P}(g(X) \leqslant m) \cdot \mathbb{P}(g(X) \geqslant m + t) \leqslant \exp\left(-\frac{t^2}{8}\right) \text{ et } \mathbb{P}(g(X) \leqslant m - t) \cdot \mathbb{P}(g(X) \geqslant m) \leqslant \exp\left(-\frac{t^2}{8}\right)$$
Puis à l'aide de la question précédente et par somme
$$\mathbb{P}(g(X) \geqslant m + t) + \mathbb{P}(g(X) \leqslant m - t) \leqslant 4 \exp\left(-\frac{t^2}{8}\right)$$
Comme $(|g(X) - m| \geqslant t) = (g(X) \geqslant m + t) \cup (g(X) \leqslant m - t)$ (union disjointe)
On a $\boxed{\mathbb{P}(|g(X) - m| \geqslant t) \leqslant 4 \exp\left(-\frac{t^2}{8}\right) \text{ où } m \text{ est une médiane de } g(X)}$

40. La variable aléatoire réelle $g(X) - m$ vérifie les hypothèse du I.D, en prenant $a = 4$ et $b = 1/8$
À l'aide de la question 9, on en déduit que $\boxed{\mathbb{E}((g(X) - m)^2) \leqslant 32}$.

41. On a $g(X)^2 = \|Xu\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{d} \varepsilon_{i,j} u_j\right)^2$
À $i \in [\![1, k]\!]$ fixé, on a
$$\left(\sum_{j=1}^{d} \varepsilon_{i,j} u_j\right)^2 = \sum_{j=1}^{d} \varepsilon_{i,j}^2 u_j^2 + 2 \sum_{1 \leqslant j < \ell \leqslant d} \varepsilon_{i,j} u_j \varepsilon_{i,\ell} u_\ell$$
La variable $\varepsilon_{i,j}^2$ est constante égale à 1 pour tout j et pour $\ell \neq j$, on a par indépendance et linéarité :
$$\mathbb{E}\left(\varepsilon_{i,j} u_j \varepsilon_{i,\ell} u_\ell\right) = u_i u_\ell \mathbb{E}\left(\varepsilon_{i,j}\right) \mathbb{E}\left(\varepsilon_{i,\ell}\right) = 0$$
(loi de Rademacher)
Donc $\mathbb{E}\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{d} \varepsilon_{i,j} u_j\right)^2 = \displaystyle\sum_{j=1}^{d} u_j^2 = \|u\|^2 = 1$ Par somme on peut conclure que $\boxed{\mathbb{E}(g(X)^2) = k}$
On applique la question 6 à $g(X) = |g(X)|$ et $Y = 1$ et $p = q = 2$ pour obtenir $\boxed{\mathbb{E}(g(X)) \leqslant \sqrt{k}}$.
NB : *On aurait pu faire appel à Cauchy-Schwarz.*

42. Par linéarité et espérance de constante puis en utilisant la question précédente car $\mathbb{P}\left(g(X) \geqslant 0\right) = 1$:
$$\mathbb{E}((g(X) - m)^2) = \mathbb{E}((g(X)^2) - 2m\mathbb{E}(g(X)) + m^2 \geqslant \mathbb{E}((g(X)^2) - 2m\sqrt{k} + m^2$$
Conclusion. $\boxed{(\sqrt{k} - m)^2 \leqslant \mathbb{E}((g(X) - m)^2)}$

III.C - Un lemme-clé

43. On sait déjà que $g(X) - m$ est à queue sous-gaussienne avec $a = 4$ et $b = 1/8$
On a $(g(X) - \sqrt{k}) = \left(g(X) - m + m - \sqrt{k}\right)$. On pose alors $\delta = m - \sqrt{k}$ et ainsi $\delta^2 = (m - \sqrt{k})^2 \leqslant 32 = \frac{a}{b}$ d'après les question 40 et 42.
On a bien $0 \leqslant |\delta| \leqslant \sqrt{\frac{a}{b}}$. On peut donc utiliser les questions 12 et 13, pour conclure que pour tout réel strictement positif t :
$$\mathbb{P}(|g(X) - \sqrt{k}| \geqslant t) \leqslant 4\exp(4)\exp\left(-\frac{1}{16}t^2\right)$$

44. On a $(|\|A_k u\| - 1| > \varepsilon) = (|\|X \cdot u\| - \sqrt{k}| > \varepsilon\sqrt{k}) \subset (|g(X) - \sqrt{k}| \geqslant \varepsilon\sqrt{k})$.
Ainsi en utilisant la question précédente avec $t = \varepsilon\sqrt{k} > 0$ on a :
$$\mathbb{P}(|\|A_k u\| - 1| > \varepsilon) \leqslant 4\exp(4)\exp\left(-\frac{1}{16}k\varepsilon^2\right)$$
Comme $k \geqslant 160\frac{\ln(1/\delta)}{\varepsilon^2} > 0$, on a :
$$\mathbb{P}(|\|A_k u\| - 1| > \varepsilon) \leqslant 4\exp(4)\exp\left(10\ln(\delta)\right) = 4\exp(4)\delta^{10} \leqslant \frac{4\exp(4)}{2^9}\delta = \frac{\exp(4)}{2^7}\delta.$$
À l'aide la calculatrice : $\dfrac{\exp(4)}{2^7} > 1$ donc pour tout vecteur unitaire u dans $\mathbb{R}^d$: $\boxed{\mathbb{P}(|\|A_k u\| - 1| > \varepsilon) < \delta}$

III.D - Conclusion

45. On applique la question 44 avec $u = \frac{v_i - v_j}{\|v_i - v_j\|}$ pour obtenir $\boxed{\mathbb{P}(\overline{E_{i,j}}) < \delta}$

46. On a : $\mathbb{P}\left(\overline{\bigcap_{1 \leqslant i < j \leqslant N} E_{i,j}}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{1 \leqslant i < j \leqslant N} \overline{E_{i,j}}\right) \leqslant \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N} \mathbb{P}\left(\overline{E_{i,j}}\right) \leqslant \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N} \delta = \dfrac{N(N-1)}{2}\delta$
En passant à l'événement contraire on obtient $\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcap_{1 \leqslant i < j \leqslant N} E_{i,j}\right) \geqslant 1 - \dfrac{N(N-1)}{2}\delta}$

47. On pose $c = 320 > 0$. Soit $\varepsilon \in]0,1[$. Soient N et d entiers $\geqslant 2$. Soient $v_1, \dots v_N$ distincts dans $\mathbb{R}^d$.
On prend $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant c\dfrac{\ln(N)}{\varepsilon^2}$ et on choisit $\delta = \dfrac{1}{N^2} \in]0, 1/2[$ de sorte que $k \geqslant 160\frac{\ln(1/\delta)}{\varepsilon^2}$.
On a alors $\mathbb{P}\left(\bigcap_{1 \leqslant i < j \leqslant N} E_{i,j}\right) > 0$ donc $\bigcap_{1 \leqslant i < j \leqslant N} E_{i,j} \neq \emptyset$
Ce qui donne une matrice A_k qui donne f qui convient et achève la preuve du théorème de Johnson et Lindenstrauss.