Polynômes d’Hermite, une correction

Partie 1

Trois résultats utiles pour la suite

1. a. Soit n un entier nature. Tout d’abord $x \mapsto x^n e^{-\frac{x^2}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Puis on a :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(x^n e^{-\frac{x^2}{2}} \right) = 0$ (par croissances comparées) donc, selon RIEMANN, l’intégrale $\int_0^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ converge.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(x^n e^{-\frac{x^2}{2}} \right) = 0$ (par croissances comparées) donc, selon RIEMANN, l’intégrale $\int_{-\infty}^0 x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ converge.

On peut donc conclure que I_n est une intégrale convergente.

b. Soit $n \geq 2$ entier. Soient $X < Y$ des réels. On a :

$$\begin{aligned} \int_X^Y x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx &= \int_X^Y x^{n-1} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &\stackrel{IPP}{=} \left\{ x^{n-1} \left(-e^{-\frac{x^2}{2}} \right) \right\}_X^Y - (n-1) \int_X^Y x^{n-2} \left(-e^{-\frac{x^2}{2}} \right) dx \\ &= -Y^{n-1} e^{-\frac{Y^2}{2}} + X^{n-1} e^{-\frac{X^2}{2}} + (n-1) \int_X^Y x^{n-2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \end{aligned}$$

En faisant tendre X vers $-\infty$ et Y vers $+\infty$ on obtient correctement :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx = (n-1) \int_{-\infty}^{+\infty} x^{n-2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

ce qui donne $I_n = (n-1)I_{n-2}$.

c. • La fonction $x \mapsto x^{2n+1} e^{-\frac{x^2}{2}}$ est impaire donc $I_{2n+1} = 0$.

• Si $n = 0$ on a $I_0 = 1$ et si $I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$ alors :

$$I_{2(n+1)} = I_{2n+2} = (2n-1)I_{2n} = (2n-1) \times \frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}(n+1)!} = \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}(n+1)!}$$

donc on peut conclure par récurrence que $I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$.

d. Soit P une fonction polynomiale. Pour tout x réel on écrit $P(x) = \sum_{k=0}^N a_k x^k$ où les a_k sont des réels et

$N \in \mathbb{N}$. Selon la première question, chaque intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ converge (k entier naturel) donc

par combinaison linéaire, $\int_{-\infty}^{+\infty} P(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ converge de somme :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sum_{k=0}^N a_k \int_{-\infty}^{+\infty} x^k e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Autre méthode : utiliser les critères de RIEMANN et les croissances comparées mais cela a été fait à la question 1.

2. a. • Les croissances comparées affirment que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{C^{2n}}{n!} = 0$ ce qui se traduit immédiatement par :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = 0 \quad (\clubsuit)$$

• Puis on a pour tout n entier $u_{2n+1} = \frac{C^{2n+1}}{E(n + \frac{1}{2})!} = C \times \frac{C^{2n}}{n!} \xrightarrow{+\infty} 0$ donc, deux par deux (note¹) avec $(\clubsuit)$, on peut conclure que $\boxed{\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$.

b. • Pour tout k entier naturel on a $u_{2k} + u_{2k+1} = \frac{C^{2k}}{k!} + \frac{C^{2k+1}}{k!} = (1 + C) \frac{C^{2k}}{k!}$. Mais la série $\sum_{k \geq 0} \frac{C^{2k}}{k!}$

converge de somme e^{C^2} donc $\boxed{\sum_{k \geq 0} u_{2k} + u_{2k+1} \text{ converge de somme } \sum_{k=0}^{+\infty} u_{2k} + u_{2k+1} = (1 + C)e^{C^2}}$.

c. Pour tout n entier on pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. On a alors pour $n \in \mathbb{N}$:

$$S_{2n+1} = \sum_{k=0}^n u_{2k} + u_{2k+1} \xrightarrow{+\infty} (1 + C)e^{C^2}$$

selon la question précédente. De plus pour $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$S_{2n} = S_{2n+1} - u_{2n+1} \xrightarrow{+\infty} (1 + C)e^{C^2}$$

donc, toujours deux par deux (note²) , on obtient $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = (1 + C)e^{C^2}$.

Conclusion. La série de terme général u_n converge de somme $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = (1 + C)e^{C^2}}$.

3. a. Soient $\lambda \in [-a, a]$ et $n \in \mathbb{N}$. Posons $v_n = \int_0^\lambda \frac{(\lambda - t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t) dt$. Pour tout t entre 0 et λ on a $|g^{(n+1)}(t)| \leq \frac{K^{n+1}(n+1)!}{E(\frac{n+1}{2})!}$ donc si $\lambda \geq 0$ on a :

$$\begin{aligned} |v_n| &\leq \int_0^\lambda \frac{|\lambda - t|^n}{n!} |g^{(n+1)}(t)| dt \leq \int_0^\lambda \frac{|\lambda - t|^n}{n!} \frac{K^{n+1}(n+1)!}{E(\frac{n+1}{2})!} dt \\ &\leq \frac{K^{n+1}(n+1)!}{E(\frac{n+1}{2})!} \int_0^\lambda \frac{\lambda^n}{n!} dt \leq \frac{K^{n+1}(n+1)!}{E(\frac{n+1}{2})!} \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Il en résulte que $|v_{2n}| \leq \frac{(\lambda K)^{2n+1}}{n!}$ et $|v_{2n+1}| \leq \frac{(\lambda K)^{2n+2}}{n!}$. Ces deux dernières égalités étant valables pour tout n entier naturel on peut conclure par sandwich que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{2n} = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_{2n+1}$$

et ainsi, toujours deux par deux (Note³), $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\lambda \frac{(\lambda - t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t) dt = 0}$$

N'oublions pas de dire ce qui se passe lorsque $\lambda < 0$. On a alors $|v_n| \leq \int_\lambda^0 \frac{|\lambda - t|^n}{n!} |g^{(n+1)}(t)| dt$ et tout le reste se traite de même en remplaçant λ par $|\lambda|$.

Conclusion. Pour tout $\lambda \in [-a, a]$ on a : $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\lambda \frac{(\lambda - t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t) dt = 0}$.

1. xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx...

2. re xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx...

3. rere xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx...

- b. • Soit $\lambda \in [-a, a]$. On écrit la formule de TAYLOR-INTÉGRALE pour la fonction g (qui est bien de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$) entre 0 et λ :

$$g(\lambda) = \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!} g^{(k)}(0) + \int_0^\lambda \frac{(\lambda-t)^k}{k!} g^{(n+1)}(t) dt$$

On fait alors tendre n vers $+\infty$ et la question précédente affirme que la série $\sum_{k \geq 0} \frac{\lambda^k}{k!} g^{(k)}(0)$ converge avec :

$$g(\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} g^{(k)}(0)$$

- Si g est une fonction polynomiale de degré d sur $[-a, a]$ alors on a alors $g^{(d+1)} = 0$ sur $[-a, a]$ et il reste :

$$g(\lambda) = \sum_{k=0}^d \frac{\lambda^k}{k!} g^{(k)}(0)$$

ce qui n'est autre que la formule de TAYLOR-LAGRANGE entre 0 et λ à l'ordre d connue encore sous le doux nom de formule de MC-LAURIN.

Partie 2

Les polynômes d'HERMITTE

1. Notons avant toute chose que pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, PQ est une fonction polynomiale donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} P(x)Q(x) dx$ est convergente en vertu de la question 1d de la partie 1 : la fonction φ est correctement définie.

- Puis φ est linéaire de sa première entrée i.e. pour tout P, Q, R dans $\mathbb{R}[X]$ et λ dans $\mathbb{R}$ on a par linéarité de l'intégrale et distributivité de la multiplication dans $\mathbb{R}$:

$$\varphi(P + \lambda Q, R) = \varphi(P, R) + \lambda \varphi(Q, R)$$

- Par commutativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$, φ est symétrique : c'est donc une **forme bilinéaire symétrique** sur $\mathbb{R}[X]$.

- Si P est dans $\mathbb{R}[X]$, $\varphi(P, P) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} P(x)^2 dx \geq 0$ par positivité de l'intégrale.

- Enfin pour P dans $\mathbb{R}[X]$ tel que $\varphi(P, P) = 0$ on a $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} P(x)^2 dx = 0$. Comme la fonction $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}} P(x)^2$ est **continue et positive** sur $\mathbb{R}$ on a $e^{-\frac{x^2}{2}} P(x)^2 = 0$ pour tout x réel ce qui impose, puisque $\exp > 0$, que le polynôme P^2 admet une infinité de racines donc $P^2 = 0$ i.e. $P = 0$.

Conclusion. φ est une **forme bilinéaire définie positive** sur $\mathbb{R}[X]$: c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2. • On pose $P_0 = 1$. Puis soit P_1 unitaire et orthogonal à P_0 dans $\text{vect}(1, X)$. On écrit $P_1 = \alpha + X$ où α est un réel. Comme P_1 est orthogonal à P_0 on a :

$$0 = \langle P_0, P_1 \rangle = \alpha \langle 1, 1 \rangle + \langle 1, X \rangle = \alpha I_0 + I_1$$

Mais on a vu que $I_0 = 1$ et $I_1 = 0$ donc on a $\alpha = 0$ et $P_1 = X$.

- Soit P_2 unitaire dans $\text{vect}(1, X, X^2)$ qui est orthogonal à $P_0 = 1$ et $P_1 = X$. On écrit $P_2 = \beta + \gamma X + X^2$ où β et γ sont des réels. Puis on a :

$$\begin{cases} 0 &= \langle P_0, P_2 \rangle = \beta \langle 1, 1 \rangle + \gamma \langle 1, X \rangle + \langle 1, X^2 \rangle = \beta I_0 + \gamma I_1 + I_2 = \beta + 1 \\ 0 &= \langle P_1, P_2 \rangle = \beta \langle X, 1 \rangle + \gamma \langle X, X \rangle + \langle X, X^2 \rangle = \beta I_1 + \gamma I_2 + I_3 = \gamma \end{cases}$$

ce qui donne $P_2 = X^2 - 1$.

• Soit P_3 dans $\text{vect}(1, X, X^2, X^3)$ qui est orthogonal à $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et $P_2 = X^2 - 1$. On écrit $P_3 = a + bX + cX^2 + X^3$. On a alors :

$$\begin{cases} 0 &= \langle P_0, P_3 \rangle = a \langle 1, 1 \rangle + b \langle 1, X \rangle + c \langle 1, X^2 \rangle + \langle 1, X^3 \rangle = aI_0 + cI_2 \\ 0 &= \langle P_1, P_3 \rangle = a \langle X, 1 \rangle + b \langle X, X \rangle + c \langle X, X^2 \rangle + \langle X, X^3 \rangle = bI_2 + I_4 \\ 0 &= \langle P_2, P_3 \rangle = \langle X^2, P_3 \rangle - \langle P_0, P_3 \rangle = aI_2 + cI_4 - (aI_0 + cI_2) = c(I_4 - I_2) \end{cases}$$

Il reste donc
$$\begin{cases} 0 &= aI_0 + cI_2 = a + c \\ 0 &= b + 3 \\ 0 &= 2c \end{cases}$$
 ce qui donne $P_3 = X^3 - 3X$.

• La famille (P_0, P_1, P_2, P_3) est orthogonale et ne contient pas le vecteur nul : elle est donc libre dans $\mathbb{R}_3[X]$ qui est de dimension 3 ; c'est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

3. a. La fonction ψ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et des calculs élémentaires amènent pour x réels :

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= -x\psi(x) \\ \psi^{(2)}(x) &= (x^2 - 1)\psi(x) \\ \psi^{(3)}(x) &= (3x - x^3)\psi(x) \end{aligned}$$

Il en résulte que l'on a pour tout x réel :

$$\boxed{H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = x, \quad H_2(x) = x^2 - 1 \quad \text{et} \quad H_3(x) = x^3 - 3x}$$

b. • Montrons (1). Pour tout x réel on a :

$$\psi^{(n+1)}(x) = (\psi')^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} (\psi'(x)) = \frac{d^n}{dx^n} (-x\psi(x))$$

Ainsi pour tout x réel on a :

$$\begin{aligned} H_{n+1}(x) &= (-1)^{n+1} e^{\frac{x^2}{2}} \psi^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} (-x\psi(x)) \\ &= (-1)^{n+1} e^{\frac{x^2}{2}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{d^n}{dx^k} (-x) \frac{d^{n-k}\psi}{dx^{n-k}}(x) \quad (\text{Formule de LEIBNIZ} \dots) \\ &= (-1)^{n+1} e^{\frac{x^2}{2}} \left(-x\psi^{(n)}(x) - n\psi^{(n-1)}(x) \right) \\ &= (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} x\psi^{(n)}(x) - n(-1)^{n-1} e^{\frac{x^2}{2}} \psi^{(n-1)}(x) \\ &= xH_n(x) - nH_{n-1}(x) \end{aligned}$$

Ceci étant valable pour une infinité de x réels on a donc $\boxed{H_{n+1} = XH_n - nH_{n-1} \quad (1)}$.

• Montrons maintenant la relation (2). Pour x réel on a $H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \psi^{(n)}(x)$ donc :

$$\begin{aligned} H'_n(x) &= (-1)^n x e^{\frac{x^2}{2}} \psi^{(n)}(x) + (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \psi^{(n+1)}(x) \\ &= xH_n(x) - H_{n+1}(x) = xH_n(x) - (xH_n(x) - nH_{n-1}(x)) \\ &= nH_{n-1}(x) \end{aligned}$$

ce qui démontre la relation $\boxed{H'_n = nH_{n-1} \quad (2)}$.

c. • Pour tout x réel on a $H_0(x) = 1$ puis on considère pour $n \in \mathbb{N}$ la propriété :

$$P(n) : \ll H_n \text{ est un polynôme unitaire de degré } n \gg$$

La propriété $P(0)$ est clairement vraie. Supposons que pour un certain n entier les propriétés $P(0), \dots, P(n)$ soit vraie. On écrit alors $H_n = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$. Or, selon la propriété (2), on a $H'_{n+1} = (n+1)H_n$ donc H_{n+1} est de classe C^∞ et en particulier H_{n+1} est C^1 . Il en résulte que pour tout x dans $\mathbb{R}$ on a :

$$H_{n+1}(x) - H_{n+1}(0) = \int_0^x H'_{n+1}(t) dt = (n+1) \int_0^x H_n(t) dt = x^{n+1} + \dots + (n+1)a_0X$$

ce qui montre que H_{n+1} est une fonction polynôme de degré $n+1$, unitaire. Par récurrence la propriété $P(n)$ est donc vrai pour tout entier naturel n : H_n est un polynôme unitaire de degré n .

• On considère alors la propriété :

$$Q(n) : \text{« } H_n \text{ est de même parité que } n \text{ »}$$

On prouve $Q(n)$ par **récurrence faible**. $Q(0)$ et $Q(1)$ sont clairement vraies. Soit $n \geq 1$. Si pour tout k dans $\{1, \dots, n\}$ $Q(k)$ est vraie alors H_n est de même parité que n donc XH_n a même parité que $n+1$ et comme H_{n-1} a même parité que $n-1$ (donc que $n+1$) on peut dire que $H_{n+1} = XH_n - nH_{n-1}$ a même parité que $n+1$.

4. Pour le lecteur...

Partie 3

$(H_n)_{n \geq 0}$ comme famille de polynômes orthogonaux

1. a. • Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et P dans $\mathbb{R}[X]$. On a pour tout x réel $H_{n-1}(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \psi^{(n-1)}(x)$ donc :

$$P(x)\psi^{(n-1)}(x) = (-1)^n \underbrace{P(x)H_{n-1}(x)}_{=Q(x)} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Comme Q est un polynôme, par croissance comparée on a immédiatement : $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x)\psi^{(n-1)}(x) = 0$.

• De même on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x)\psi^{(n-1)}(x) = 0$.

b. • Lorsque $n = 0$ on a de suite $\langle H_0, H_0 \rangle = 1$.

• Prenons maintenant $n \geq 1$. Il vient alors

$$\begin{aligned} \langle H_n, H_0 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{x^2}{2}} \psi^{(n)}(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^{(n)}(x) dx = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \psi^{(n-1)} \right\}_{-\infty}^{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

d'après la question précédente.

Conclusion. Pour tout n entier on a $\langle H_n, H_0 \rangle = \delta_0^n$.

c. • On a :

$$\begin{aligned} \langle H_n, H_m \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) H_m(x) dx \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{\frac{x^2}{2}} \psi^{(n)}(x) H_m(x) dx \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) \psi^{(n)}(x) dx \end{aligned}$$

ce qui montre bien que l'on a

$$\langle H_n, H_m \rangle = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) \psi^{(n)}(x) dx \quad \text{valable en fait pour tout } (m, n) \in \mathbb{N}^2 \quad (\heartsuit)$$

• Puis prenons α et β dans $\mathbb{R}$ avec $\alpha < \beta$. On a

$$\int_{\alpha}^{\beta} H_m(x)\psi^{(n)}(x) dx = \left[H_m(x)\psi^{(n-1)}(x) \right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} H'_m(x)\psi^{(n-1)}(x) dx$$

Mais on a vu que (question 3b de la partie 2) $H'_m = mH_{m-1}$ ce qui donne :

$$\int_{\alpha}^{\beta} H_m(x)\psi^{(n)}(x) dx = H_m(\beta)\psi^{(n-1)}(\beta) - H_m(\alpha)\psi^{(n-1)}(\alpha) - m \int_{\alpha}^{\beta} H_{m-1}(x)\psi^{(n-1)}(x) dx \quad (\heartsuit\heartsuit)$$

Mais selon $(\heartsuit)$ on obtient correctement, en faisant tendre X vers $-\infty$ et Y vers $+\infty$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_{m-1}(x)\psi^{(n-1)}(x) dx = (-1)^{n-1} \langle H_{n-1}, H_{m-1} \rangle$$

De plus, la question 1a de la partie 3 assure que :

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} H_m(\alpha)\psi^{(n-1)}(\alpha) = 0 = \lim_{\beta \rightarrow -\infty} H_m(\beta)\psi^{(n-1)}(\beta)$$

donc avec $(\heartsuit\heartsuit)$, en faisant $\alpha \rightarrow -\infty$ et $\beta \rightarrow +\infty$ on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x)\psi^{(n)}(x) dx = (-1)^n m \langle H_{n-1}, H_{m-1} \rangle$$

ce qui prouve bien, en utilisant à nouveau $(\heartsuit)$ que :

$$\boxed{\langle H_n, H_m \rangle = m \langle H_{n-1}, H_{m-1} \rangle}$$

• Soient m et n dans $\mathbb{N}$, distincts. Par exemple on a $n < m$ et on pose alors $q = m - n > 0$. Le point précédent permet de dire que :

$$\langle H_n, H_m \rangle = m(m-1)\dots(m-n+1) \langle H_0, H_{m-n} \rangle = 0$$

donc $\boxed{(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.

• Enfin on a immédiatement : $\boxed{\langle H_n, H_n \rangle = n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. a. La famille $(H_0, \dots, H_k)$ est une base de $\mathbb{R}_k[X]$ (pour le lecteur...) donc il existe $a_0, \dots, a_k$ dans $\mathbb{R}$ tels que :

$$R = \sum_{i=0}^k a_i H_i$$

Il vient alors par bilinéarité du produit scalaire :

$$\langle H_{k+1}, R \rangle = \sum_{i=0}^k a_i \underbrace{\langle H_{k+1}, H_i \rangle}_{=0 \text{ puisque } i \neq k+1} = 0$$

b. • Soyons fou et suivons l'indication de l'énoncé. Comme H_{k+1} est unitaire de degré k , le polynôme $Q = X^{k+1} - H_{k+1}$ est dans $\mathbb{R}_k[X]$ et il en va de même de $Q - P$. Ainsi, selon la question précédente, on a :

$$\langle H_{k+1}, Q - P \rangle = 0$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} \|X^{k+1} - P\|^2 &= \|X^{k+1} - H_{k+1} + H_{k+1} - P\|^2 = \|Q + H_{k+1} - P\|^2 \\ &= \|H_{k+1} + Q - P\|^2 = \|H_{k+1}\|^2 + \|Q - P\|^2 + 2 \underbrace{\langle H_{k+1}, Q - P \rangle}_{=0} \end{aligned}$$

ce qui donne : $\boxed{\|X^{k+1} - P\|^2 = \|H_{k+1}\|^2 + \|Q - P\|^2} \quad (**)$.

- Appelons Y le projeté orthogonal de X^{k+1} sur $\mathbb{R}_k[X]$. Le théorème de minimisation (appliqué à bon droit) affirme que Y est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_k[X]$ tel que pour tout U dans $\mathbb{R}_k[X]$ on ait :

$$\|X^{k+1} - Y\| \leq \|X^{k+1} - U\|$$

Or (***) affirme que pour P dans $\mathbb{R}_k[X]$, $\|X^{k+1} - P\|^2$ est minimale lorsque $P = Q$ i.e. lorsque $P = X^{k+1} - H_{k+1}$.

Ainsi le projeté orthogonal de X^{k+1} sur $\mathbb{R}_k[X]$ est $X^{k+1} - H_{k+1}$.

Autre méthode. On a vu que H_{k+1} est degré $k+1$ et orthogonal à $\mathbb{R}_k[X]$. On écrit alors :

$$X^{k+1} = X^{k+1} - H_{k+1} + H_{k+1} \quad (***)$$

Comme H_{k+1} est unitaire de degré k on a $X^{k+1} - H_{k+1} \in \mathbb{R}_k[X]$ et ainsi (***) est l'écriture de X^{k+1} selon la somme directe orthogonale $\mathbb{R}_{n+1}[X] = \mathbb{R}_k[X] \oplus^\perp F_k$ où F_k est l'orthogonal de $\mathbb{R}_k[X]$ dans $\mathbb{R}_{n+1}[X]$: par définition de la projection orthogonale, le projeté orthogonal de X^{k+1} sur $\mathbb{R}_k[X]$ est donc $X^{k+1} - H_{k+1}$.

- c. Résumons ce qui précède : on a vu que pour tout k dans $\mathbb{N}$ le polynôme H_k est de degré k puis que $\text{vect}(H_0, \dots, H_k) = \mathbb{R}_k[X]$ donc :

$$\text{vect}(H_0, \dots, H_k) = \text{vect}(1, \dots, X^k)$$

De plus $(H_0, \dots, H_{n+1})$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}^{n+1}[X]$.

Pour $0 \leq k \leq n+1$ on pose alors $G_k = \frac{1}{\|H_k\|} H_k = \frac{1}{\sqrt{k!}} H_k$ et ainsi $(G_k)_{0 \leq k \leq n+1}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ telle que pour tout k dans $\{0, \dots, n+1\}$ on a :

$$\text{vect}(G_0, \dots, G_k) = \text{vect}(1, \dots, X^k)$$

Pour être assuré qu'il s'agit bien de la base orthonormée obtenue à partir de $(X^k)_{0 \leq k \leq n+1}$ par le procédé de GRAM-SCHMIDT il faut vérifier que : $\langle G_k, X^k \rangle > 0$ pour tout $0 \leq k \leq n+1$. Fixons k entier tel que $1 \leq k \leq n+1$. On écrit alors :

$$X^k = (X^k - H_k) + H_k \quad \text{selon } \mathbb{R}[X] = \mathbb{R}_{k-1}[X] \oplus \mathbb{R}_{k-1}[X]^\perp$$

Il vient ainsi

$$\langle H_k, X^k \rangle = \langle H_k, X^k - H_k + H_k \rangle = \langle H_k, X^k - H_k \rangle + \|H_k\|^2 = \|H_k\|^2 > 0$$

comme souhaité. En notant enfin que $H_0 = 1$ on a encore $\langle H_k, X^0 \rangle = \|1\|^2 > 0$.

Partie 4

Un développement en série de Hermitte

1. La famille $(H_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$ donc la famille $\left(\frac{1}{\|H_k\|} H_k \right)_{0 \leq k \leq n}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$. Il en résulte que pour tout P dans $\mathbb{R}_n[X]$ on a :

$$P = \sum_{k=0}^n \left\langle P, \frac{1}{\|H_k\|} H_k \right\rangle \frac{1}{\|H_k\|} H_k = \sum_{k=0}^n \langle P, H_k \rangle \frac{1}{\|H_k\|^2} H_k$$

et on a vu que $\|H_k\|^2 = \langle H_k, H_k \rangle = k!$ ce qui amène :

$$P = \sum_{k=0}^n \langle P, H_k \rangle \frac{H_k}{k!}$$

2. a. On choisit arbitrairement b et c dans $\mathbb{R}$ tels que $b \leq c$ et $x \in [b, c]$. Il existe alors, selon la propriété admise par l'énoncé, un réel K (dépendant de b et c) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [b, c]$ on ait :

$$\left| \frac{H_n(x)}{n!} \right| \leq \frac{K^n}{E(\frac{n}{2})!}$$

Mais on a vu à la question 2 de la partie 1 que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{K^n}{E(\frac{n}{2})!}$ converge : par domination, la série

$\sum_{n \geq 0} \frac{H_n(x)}{n!}$ est donc absolument convergente donc convergente.

- b. • La fonction g_x est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$. Mieux, pour tout λ réel on a $g_x(\lambda) = \psi \circ u(\lambda)$ où $u(\lambda) = \lambda - x$. Ainsi il vient :

$$g'_x = \psi'(u) \times u' = \psi'(u)$$

et une petite récurrence assure alors que pour tout n entier on a :

$$g_x^{(n)} = \psi^{(n)}(u) = (-1)^n e^{-\frac{u^2}{2}} H_n(u) \quad (\spadesuit)$$

donc pour tout λ réel on a :

$$g_x^{(n)}(\lambda) = (-1)^n e^{-\frac{(\lambda-x)^2}{2}} H_n(\lambda-x) \quad (\spadesuit)$$

.

- Fixons a réel. Déjà g_x est de classe C^∞ sur $[-a, a]$ donc $|g_x^{(n)}|$ est continue par composition sur le segment $[-a, a]$ ce qui justifie de l'existence de $\max_{t \in [-a, a]} |g_x^{(n)}(t)|$. Puis selon le point précédent on a :

$$\max_{t \in [-a, a]} |g_x^{(n)}(t)| = \max_{t \in [-a, a]} \left(e^{-\frac{(t-x)^2}{2}} |H_n(t-x)| \right)$$

Puis pour tout t dans $[-a, a]$ on a $e^{-\frac{(t-x)^2}{2}} \leq 1$ puisque $(t-x)^2 \geq 0$ ce qui amène :

$$\max_{t \in [-a, a]} |g_x^{(n)}(t)| \leq \max_{t \in [-a, a]} |H_n(t-x)| \quad (\spadesuit\spadesuit)$$

Or $\max_{t \in [-a, a]} |H_n(t-x)| = \max_{s \in [-a-x, a-x]} |H_n(s)|$ et en prenant $b = -a-x$ et $c = a-x$ l'énoncé affirme alors l'existence d'une constante $K_{a,x}$ (qui dépend donc de a et x) telle que pour tout s dans $[-a-x, a-x]$ on ait : $\left| \frac{H_n(s)}{n!} \right| \leq \frac{K_{a,x}^n}{E(\frac{n}{2})!}$ ce qui amène avec $(\spadesuit\spadesuit)$:

$$\max_{t \in [-a, a]} |g_x^{(n)}(t)| \leq \frac{K_{a,x}^n n!}{E(\frac{n}{2})!}$$

Ainsi g_x vérifie les hypothèses du 3 de la partie 1.

- Montrons alors que pour tout $(x, \lambda) \in \mathbb{R}^2$ on a : $e^{\lambda x - \frac{\lambda^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{n!} \lambda^n$.

Fixons x et λ dans $\mathbb{R}$. Comme g_x vérifie les hypothèses du 3 de la partie 1, pour tout λ dans $[-a, a]$ on a :

$$g_x(\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} g_x^{(k)}(0)$$

Mais pour tout k entier naturel on obtient avec $(\spadesuit)$:

$$g_x^{(k)}(0) = (-1)^k e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(-x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x)$$

puisque H_k est de la parité de k . Il vient alors : $g_x(\lambda) = e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} H_k(x)$
ce qui conduit au résultat souhaité (en notant que $g_x(\lambda) = e^{-\frac{\lambda^2 - \lambda x + x^2}{2}}$) :

$$e^{\lambda x - \frac{\lambda^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{n!} \lambda^n$$

c. • Soit $n \in \mathbb{N}$. Tout d'abord $x \mapsto e^x H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Puis on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2} + x} = 0$
par croissances comparées et de même $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2} + x} = 0$. Ainsi via la règle de RIEMANN l'intégrale $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^x H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ converge.

• On a pour $n \geq 1$ entier (et tant pis pour le « avec soin ») :

$$\begin{aligned} \langle \exp, H_n \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^x H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^x \psi^{(n)}(x) dx \\ &\stackrel{\text{IPP formelle}}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\left\{ e^x \psi^{(n)}(x) \right\}_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^x \psi^{(n-1)}(x) dx \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^x \psi^{(n-1)}(x) dx \\ &= \langle \exp, H_{n-1} \rangle \end{aligned}$$

Il en résulte que pour tout $n \geq 1$ on a

$$\langle \exp, H_n \rangle = \langle \exp, H_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Il reste alors à calculer cette intégrale. On a :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2} + x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}[(x-1)^2 - 1]} dx \\ &\stackrel{\substack{= \\ x-1=s}}{=} e^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds = \sqrt{2\pi} e \end{aligned}$$

et il vient donc $\langle \exp, H_n \rangle = \sqrt{e}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• Enfin on a (selon le résultat de la question précédente avec $\lambda = 1$) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \langle \exp, H_n \rangle \frac{H_n(x)}{n!} = \sqrt{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{n!} = \sqrt{e} e^{x - \frac{1}{2}} = e^x$$

ce qui termine ce superbe problème.

FIN DE LA CORRECTION