

Presque tout sur la fonction Gamma, une correction

Partie I - Premières propriétés et prolongement de Γ

1. a. • Commençons par un petit résultat intermédiaire. Si f est une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$ qui vérifie $(\mathcal{P})$ et si x est dans D alors pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a $x + p \in D$.

En effet si pour un certain entier naturel p on a $x + p \in D$ alors, selon la propriété $(\mathcal{P}_2)$, $x + p + 1$ est dans D . Comme $x + 0 \in D$, on peut conclure selon le théorème de la récurrence, que $x + p \in D$ pour tout entier naturel p .

• Si maintenant f est une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$ qui vérifie $(\mathcal{P})$ et si $n \in D \cap \mathbb{Z}^-$ alors $n + |n| = 0 \in D$ selon le point précédent et on a alors (selon $\mathcal{P}_3$) la stupidité $f(1) = 0 \times f((0)) = 0$. Ainsi $\boxed{D \cap \mathbb{Z}^- = \emptyset}$.

b. Simples vérifications pour le lecteur.

2. On a $t^{x-1}e^{-t} \underset{0}{\sim} t^{x-1}$ et $\int_0^1 t^{x-1} dt$ converge si et seulement si $1 - x < 1$ i.e. $0 < x$ (intégrales de RIEMANN) donc $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t} dt$ converge si et seulement si $x > 0$.

Puis, pour tout x réel, par croissances comparées on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 t^{x-1} e^{-t} = 0$ donc $\int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ converge.

Conclusion. On a $\boxed{D_\Gamma =]0, +\infty[}$

- a. • On a $1 \in D_\Gamma$ et $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$ donc $(\mathcal{P}_1)$ est vérifiée.

• Si $x \in D_\Gamma =]0, +\infty[$ on a bien $x + 1 \in D_\Gamma$ donc $(\mathcal{P}_2)$ est vérifiée.

• Soit x dans D_Γ . Une intégration par parties formelle donne :

$$\Gamma(x+1) = \left\{ -t^x e^{-t} \right\}_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x t^{x-1} e^{-t} dt$$

Cette intégration par partie est justifiée à posteriori et donne $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ donc $(\mathcal{P}_3)$ est vérifiée.

Conclusion. $\boxed{\Gamma \text{ a la propriété } (\mathcal{P})}$.

- b. Soit x dans D_Γ . Si pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\Gamma(x+n) = \left(\prod_{k=0}^{n-1} (x+k) \right) \Gamma(x)$$

$$\text{alors } \Gamma(x+n+1) = (x+n)\Gamma(x+n) = (x+n) \left(\prod_{k=0}^{n-1} (x+k) \right) \Gamma(x) = \left(\prod_{k=0}^n (x+k) \right) \Gamma(x).$$

Comme $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ on peut appliquer le théorème de la récurrence qui affirme que pour

tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\Gamma(x+n) = \left(\prod_{k=0}^{n-1} (x+k) \right) \Gamma(x)$$

3. a. Soient $x > 0$ et $n > 0$. Selon la question précédente on a :

$$\Gamma(x+n) = (x+n-1) \dots (x+1)x\Gamma(x)$$

donc il vient $A_n(x) = \Gamma(x)$ ce qui prouve que $A_n(x)$ est indépendant de n .

b. • Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $x_n = x + n$. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ donc pour tout A réel il existe N_A tel que : $(\forall n \geq N_A)(x_n \geq A)$.

On prend $A = 1$ et $N_x = N_1$. On a alors $x + n > 0$ pour tout $n \geq N_x$.

• Pour $n > N_x$ on a $x + n > 0$ donc on peut considérer à bon droit $\Gamma(x+n)$ et $\Gamma(x+n+p)$ et ainsi $A_n(x)$ et $A_{n+p}(x)$ sont correctement définis. Puis on a :

$$\begin{aligned} A_{n+p}(x) &= \frac{\Gamma(x+n+p)}{x(x+1) \dots (x+n+p-1)} \\ &= \frac{\left(\prod_{k=0}^{p-1} (x+n+k) \right) \Gamma(x+n)}{x(x+1) \dots (x+n+p-1)} \quad (\text{selon la question 2b}) \\ &= \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1) \dots (x+n-1)} \end{aligned}$$

Il en résulte que $A_{n+p}(x) = A_n(x)$.

c. • Montrons que $\tilde{\Gamma}$ a la propriété $(\mathcal{P})$:

- Tout d'abord $1 \in E$ et $\tilde{\Gamma}(1) = \Gamma(1) = 1$.
- Puis si $x \in E$ on a bien $x+1 \in E$.
- Enfin pour x dans E on a :

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}(x+1) &= A_n(x+1) = \frac{\Gamma(x+1+n)}{(x+1) \dots (x+n)} \\ &= \frac{x(x+n)\Gamma(x+n)}{x(x+1) \dots (x+n)} = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1) \dots (x+n-1)} \\ &= xA_n(x) = x\tilde{\Gamma}(x) \end{aligned}$$

Ainsi $\tilde{\Gamma}$ a la propriété $(\mathcal{P})$.

• Soit $x > 0$. On a alors $\tilde{\Gamma}(x) = A_n(x)$ et ce pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ selon la question 3a. On prend par exemple $n = 1$ pour obtenir :

$$\tilde{\Gamma}(x) = A_1(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} = \Gamma(x)$$

• Soit x dans E . On démontre de la même manière qu'à question 2b, puisque $\tilde{\Gamma}(x+1) = x\tilde{\Gamma}(x)$, que :

$$\tilde{\Gamma}(x+n) = \left(\prod_{k=0}^{n-1} (x+k) \right) \tilde{\Gamma}(x)$$

Partie II - Fonction B , étude asymptotique et régularité

4. a. • Par exemple, on fait l'étude sur $[0, 1[$ de la fonction définie par $\varphi(x) = \ln(1-x) + x$. Cette fonction est dérivable sur $[0, 1[$ comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle et on a pour $x \in [0, 1[$:

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{1-x} + 1 = -\frac{x}{1-x} > 0$$

Ainsi φ est strictement décroissante sur $[0, 1[$: pour tout $x \geq 0$ on a $\varphi(x) \leq \varphi(0) = 0$ ce qui donne le résultat : $\ln(1-x) \leq -x$ pour tout x dans $[0, 1[$.

- Soit t dans $[0, n[$. On a alors $\frac{t}{n} \in [0, 1[$ et ainsi, en vertu de ce qui précède :

$$\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \leq -\frac{t}{n}$$

Il vient alors $n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \leq -t$ i.e. $\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq -t$ et par croissance de l'exponentielle on obtient :

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$$

On remarque enfin que cette inégalité est clairement vraie si $t = n$.

- b. • La fonction φ est dérivable sur $[0, \sqrt{n}[$ comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle et on a pour $t \in [0, \sqrt{n}[$:

$$\varphi'(t) = -2 \frac{\frac{t}{n}}{1 - \frac{t^2}{n}} - 1 + \frac{1}{1 - \frac{t}{n}} = -\frac{t(n - 2t + t^2)}{(n - t^2)(n - t)}$$

$\varphi'(t)$ est donc du signe de $-(n - 2t + t^2)$ qui est toujours négatif puisque $\Delta' = 1 - n$. Ainsi la fonction φ est **décroissante**.

- Soit t dans $[0, \sqrt{n}[$. Selon le point précédent on a $\varphi(t) \leq \varphi(0) = 0$ donc :

$$\ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) - t \leq n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)$$

ce qui peut encore s'écrire $\underbrace{\ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) - \ln e^t}_{=\ln\left(\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)e^{-t}\right)} \leq \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$.

Par croissance de l'exponentielle on obtient alors : $\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ pour tout $t \in [0, \sqrt{n}[$.

- c. • Soit t dans $[0, n[$. L'inégalité $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$ provient de la question 1a. Puis si $t \in [0, \sqrt{n}[$ on vient de démontrer (à la question précédente) que $e^{-t} - \frac{t^2}{n}e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$. Il reste à justifier cette inégalité lorsque $t \in [\sqrt{n}, n[$ ce qui est en fait évident puisqu'alors on a $\frac{t^2}{n} \geq 1$ et ainsi $e^{-t} - \frac{t^2}{n}e^{-t} \leq 0 \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$.

Conclusion. Pour tout t dans $[0, n[$ on a : $e^{-t} - \frac{t^2}{n}e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$.

- Fixons $x > 0$. Selon le point précédent, si $n \geq 1$ alors pour tout t dans $[0, n[$ on a :

$$\left(e^{-t} - \frac{t^2}{n}e^{-t}\right)t^{x-1} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \leq e^{-t}t^{x-1}$$

et ainsi, par croissance de l'intégrale on obtient correctement pour tout $n \geq 1$:

$$\int_0^n \left(e^{-t} - \frac{t^2}{n}e^{-t}\right)t^{x-1} dt \leq \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt \leq \int_0^n e^{-t}t^{x-1} dt$$

donc

$$\int_0^n e^{-t}t^{x-1} dt - \frac{1}{n} \int_0^n e^{-t}t^{x+2} dt \leq \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt \leq \int_0^n e^{-t}t^{x-1} dt \quad (\diamond)$$

Mais on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n e^{-t}t^{x-1} dt = \Gamma(x)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n e^{-t}t^{x+2} dt = \Gamma(x+3)$ ce qui amène

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_0^n e^{-t}t^{x+2} dt = 0$$

Par sandwich avec $(\diamond)$ on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \Gamma(x)$.

Conclusion. Pour tout $x > 0$ on a : $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt \quad (\clubsuit)$

5. a. L'intégrale $B(x, y)$ est doublement impropre en 0 et 1. Le changement de variable $u = 1 - t$ montre de suite que $B(x, y) = B(y, x)$ et il suffit donc de prouver la convergence en 0. Mais on a :

$$t^{x-1}(1-t)^{y-1} t^{x-1} \underset{0^+}{\geq} 0$$

et le critère de RIEMANN assure que $\int_0^1 t^{x-1} dt$ converge si et seulement si $1 - x < 1$ i.e. $x > 0$.

Conclusion. $B(x, y)$ converge et $B(x, y) = B(y, x)$.

- b. On a :

$$\begin{aligned} B(x+1, y) &= \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1} dt = \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^x (1-t)^{x+y-1} dt \\ &= \left\{ -\frac{(1-t)^{x+y}}{x+y} \left(\frac{t}{1-t}\right)^x \right\}_0^1 + \frac{x}{x+y} \int_0^1 (1-t)^{x+y} \left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1} \frac{1}{(1-t)^2} dt \\ &= \frac{x}{x+y} \int_0^1 (1-t)^{y-1} t^{x-1} dt \end{aligned}$$

donc on a : $B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y)$.

- c. • Soit $n \geq 1$ entier. Comme la fonction bêta est symétrique (selon la question 2a) on obtient via la question précédente :

$$B(x, n+1) = B(n+1, x) = \frac{n}{x+n} B(n, x)$$

Mais $B(x+1, n) = \frac{x}{x+n} B(x, n)$ donc :

$$\frac{n}{x} B(x+1, n) = \frac{n}{x} \frac{x}{x+n} B(x, n) = \frac{n}{x+n} B(n, x) = B(x, n+1)$$

Conclusion. $\text{Pour tout } n \geq 1 \text{ entier on a } B(x, n+1) = \frac{n}{x} B(x+1, n).$

- Une petite récurrence sur $n \geq 1$ amène de suite :

$$B(x, n+1) = \frac{n!}{x(x-1)\dots(x+n-1)} B(x+n, 1)$$

et on a $B(x+n, 1) = \int_0^1 t^{x+n-1} dt = \left[\frac{t^{x+n}}{x+n} \right]_0^1 = \frac{1}{x+n}$ donc :

$$\boxed{B(x, n+1) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}}$$

- d. Soit $n \geq 1$ entier. Le changement de variable $t = nu$ donne :

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = n^x \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du = n^x B(x, n+1)$$

et ($\clubsuit$) affirme alors que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^x B(x, n+1) = \Gamma(x).$

- e. • Les question 2c et 2d affirment que pour tout $x > 0$ on a :

$$\boxed{\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}}$$

- Soit $x > 0$. Selon le cours on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et une récurrence sur $n \geq 1$ permet de dire que :

$$\Gamma(x+n) = x(x+1)\dots(x+n-1)\Gamma(x) \quad (\diamond\diamond)$$

Le point précédent affirme que $\frac{x(x+1)\dots(x+n)\Gamma(x)}{n^x n!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$ donc on a avec ($\diamond\diamond$) :

$$\Gamma(x+n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^x n!}{(x+n)}$$

Mais $x+n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$ d'où : $\Gamma(x+n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^x (n-1)!.$

- f. La question précédente affirme que $\Gamma(n + \frac{1}{2}) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{n} (n-1)!.$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $x_n = \lambda_n \times \sqrt{\frac{n}{2}}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\bullet x_{2n} = \lambda_{2n} \sqrt{n} = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n + \frac{1}{2})} \sqrt{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{(n-1)!}{\sqrt{n} (n-1)!} \sqrt{n} = 1.$$

$$\bullet x_{2n+1} = \lambda_{2n+1} \sqrt{n + \frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)} \sqrt{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n} (n-1)!}{n!} \sqrt{n} = 1.$$

Il en résulte que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n} = 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n+1}$ donc (« deux par deux ») $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$ et ainsi :

$$\boxed{\lambda_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{n}}}$$

6. Pour le lecteur : déjà fait plusieurs fois...

Partie III - La fonction $\ln \Gamma$

7. a. • Soit $n \geq 2$ entier. La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ donc pour tout $k \geq 2$ entier et tout $t \in]k, k+1[$ on a : $\frac{1}{k+1} < \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$.

On intègre entre k et $k+1$ pour obtenir : $\frac{1}{k+1} < \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$ et ainsi

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \int_1^n \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \text{ ce qui donne } \boxed{\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} < \ln n < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}}$$

- La seconde de ces inégalités donne de suite $\gamma_n \geq \frac{1}{n} > 0$ et la première donne :

$$\gamma_n = -\ln n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = -\ln n + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} + 1 \leq 1$$

- b. Soit $n \geq 1$ entier. On a $\gamma_{n+1} - \gamma_n = -\ln(n+1) + \ln n + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} < 0$ donc la suite (γ_n) est **strictement décroissante**. Comme elle est **minorée** (par 0) elle converge.

8. a. Soit $x > 0$ et $n \geq 1$ entier. On a :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) \exp\left(-\frac{x}{k}\right) \right] &= \left[\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right) \right] \exp\left(-x \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) = \left[\prod_{k=1}^n \frac{x+k}{k} \right] e^{-x(\gamma_n + \ln n)} \\ &= \frac{1}{n!} \left[\prod_{k=1}^n (x+k) \right] n^{-x} e^{-x\gamma_n} \end{aligned}$$

On a donc : $\boxed{\prod_{k=1}^n \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) \exp\left(-\frac{x}{k}\right) \right] = \exp(-x\gamma_n) \times \frac{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}{n^x n!}}$

- b. D'après la question 2.e on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}{n^x n!} = \frac{1}{x\Gamma(x)}$. De plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n = \gamma$. Par continuité de l'exponentielle, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-x\gamma_n} = e^{-x\gamma}$. Ainsi, par produit :

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(x) = \frac{e^{-x\gamma}}{x\Gamma(x)}.$$

9. a. On dispose du développement limité à l'ordre 2 en 0 : $\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$.

Ainsi, en posant pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$, on a : $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Il en résulte que $x_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^2}{2n^2} \boxed{\geq 0}$.

Les séries $\sum_{n \geq 1} x_n$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^2}$ ont donc même nature. Mais cette dernière série est convergente (Riemann).

Conclusion. $\boxed{\text{La série de terme général } \frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \text{ est convergente.}}$

- b. Soit $x > 0$. Pour tout $n \geq 1$ entier, on a $v_n(x) > 0$ et $\ell(x) > 0$. Par continuité du logarithme naturel, puisque $v_n(x) \xrightarrow{+\infty} \ell(x)$, on a :

$$\ln(v_n(x)) \xrightarrow{+\infty} \ln(\ell(x)).$$

Mais pour tout $n \geq 1$ entier on a :

$$\begin{aligned}\ln(v_n(x)) &= \ln = \left(\prod_{k=1}^n \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) \exp\left(-\frac{x}{k}\right) \right] \right) = \sum_{k=1}^n \ln \left(\left(1 + \frac{x}{k}\right) \exp\left(-\frac{x}{k}\right) \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\ln \left(\left(1 + \frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k} \right) \right) = - \sum_{k=1}^n \left(\frac{x}{n} - \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) \right)\end{aligned}$$

Ainsi en faisant tendre n vers $+\infty$, on retrouve le fait que la série de terme général $\frac{x}{n} - \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)$ est convergente et on a :

$$\boxed{- \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n} - \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) \right) = \ell(x)} \quad (\heartsuit).$$

On a vu que $\ell(x) = \frac{e^{-\gamma x}}{x\Gamma(x)}$. Il en résulte que l'on a correctement :

$$\ln(\ell(x)) = -\gamma x - \ln x - \ln \Gamma(x).$$

Avec $(\heartsuit)$, on obtient : $\boxed{\ln \Gamma(x) = -\gamma x - \ln x + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n} - \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) \right)}.$

10. • Le théorème des fonctions composées nous assure que $\chi : x \mapsto \ln(\Gamma(x))$ est de classe C^∞ , puisque l'on a vu que Γ est C^∞ . De plus, pour $x > 0$, on a :

$$\psi(x) = \chi'(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.$$

Il en résulte que $\psi(x+1) = \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{\Gamma'(x+1)}{x\Gamma(x)}$.

Mais, comme pour tout $x > 0$ on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, il vient : $\Gamma'(x+1) = x\Gamma'(x) + \Gamma(x)$. Ainsi :

$$\psi(x+1) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \frac{1}{x} = \psi(x) + \frac{1}{x}.$$

- Pour $x > 0$ on a donc $x\psi(x+1) - x\psi(x) = -1$. Par continuité de ψ en 1, on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \psi(x+1) = \psi(1)$, donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x\psi(x) = 1.$$

Conclusion. On a $\boxed{\psi(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x}}.$

- Une récurrence montre immédiatement que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\boxed{\psi(n) = \psi(1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}}.$$

11. a. A la question 6.b on a obtenu, pour tout $x > 0$, la formule :

$$A(x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x) = -\Gamma(x) - \gamma x - \ln x.$$

La fonction A est donc de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ comme somme de fonctions de classes C^∞ sur cet intervalle.

Puis, pour tout $x > 0$ on a :
$$A'(x) = -\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \gamma - \frac{1}{x}.$$

Encore, pour $x > 0$, il vient :
$$A''(x) = \frac{[\Gamma'(x)]^2 - \Gamma''(x)\Gamma(x)}{[\Gamma(x)]^2} + \frac{1}{x^2}.$$

b. • Soit $n \geq 1$ entier. Pour tout $x > 0$, on a $U'_n(x) = \frac{\frac{1}{n}}{\ln(1 + \frac{x}{n})} - \frac{1}{n} = \frac{1}{x+n} - \frac{1}{n} = -\frac{x}{n(x+n)}.$

Il en résulte que $|U'_n(x)| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{n^2} \boxed{> 0}.$

Ainsi, comme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann), $\boxed{\text{la série } \sum_{n \geq 1} U'_n(x) \text{ est absolument convergente.}}$

• On a encore, pour $n \geq 1$ entier et $x > 0$: $U''_n(x) = -\frac{1}{(x+n)^2}$

Alors, pour tout $k \geq 2$, on obtient immédiatement par récurrence sur k , $U_n^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(x+n)^k},$ pour tout $x > 0$ et $n \geq 1$ entier.

Ainsi $|U_n^{(k)}(x)| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(k-1)!}{n^k} \boxed{> 0}.$

Ainsi, comme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^k}$ converge (car $k \geq 2$, Riemann), $\boxed{\text{la série } \sum_{n \geq 1} U'_n(x) \text{ est absolument convergente.}}$

12. • On a vu que $\psi = \frac{\Gamma'}{\gamma}$. Avec l'expression de A' , il vient donc, pour $x > 0$:

$$\boxed{\psi(x) = -A'(x) - \gamma x - \frac{1}{x}} \quad (\clubsuit\clubsuit\clubsuit)$$

Mais l'énoncé nous dit que $A'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} U'_n(x)$, donc : $A(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) = -1.$

Ainsi $\boxed{\psi(1) = -\gamma}.$

• A la question 7, on a vu que, pour tout $n \geq 1$ entier, on a :

$$\psi(n) = \psi(1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Mais $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \gamma_n + \ln n - \frac{1}{n}$ donc $\psi(n) - \ln n = -\gamma + \gamma_n - \frac{1}{n} \xrightarrow{+ \infty} 0.$

Conclusion. $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln n - \psi(n)) = 0}.$

13. a. • La fonction G est clairement strictement positive et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ puisque obtenue en composant une fonction strictement décroissante avec une fonction strictement croissante.

• En passant par une primitive et les intégrales partielles, on voit rapidement que l'intégrale $\int_1^{+\infty} G(t) dt$ est convergente de valeur $\frac{1}{x+1}.$

- b. Soit $k \geq 1$ entier. Comme G est strictement décroissante, pour tout t dans $[k, k+1]$, on a : $G(t) < G(k)$.

Il vient donc : $\int_k^{k+1} G(t) dt < G(k)$. Il en résulte que pour tout $n \geq 1$ entier on a :

$$\sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} G(t) dt < \sum_{k=1}^n G(k).$$

Avec la relation de Chasles, par passage à la limite (puisque les suites des deux côtés de l'inégalité convergent), on obtient l'inégalité LARGE :

$$\int_1^{+\infty} G(t) dt \leq \sum_{k=1}^{+\infty} G(k).$$

Comme G est strictement positive, on obtient en définitif : $0 < \int_1^{+\infty} G(t) dt \leq \sum_{k=1}^{+\infty} G(k)$.

Commentaire. Pour établir l'inégalité stricte, on peut par exemple établir d'abord l'inégalité

$$\int_2^{+\infty} G(t) dt \leq \sum_{k=2}^{+\infty} G(k),$$

puis ajouter membre à membre l'inégalité stricte : $\int_1^2 G(t) dt < G(1)$.

- c. • Avec ($\clubsuit\clubsuit\clubsuit$), on obtient, pour $x > 0$: $\psi'(x) = -A''(x) + \frac{1}{x^2}$. Mais on a :

$$A''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} U_n''(x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{(x+n)^2}}_{=G_n(x)} \leq - \int_1^{+\infty} G(t) dt = -\frac{1}{x+1}.$$

Ainsi, pour $x > 0$, on a :

$$\psi'(x) \geq \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2}.$$

- Pour $x > 0$ on a donc $\psi'(x) \geq \frac{x^2+x+1}{(x+1)x^2} > \frac{x^2+x}{(x+1)x^2} = \frac{1}{x}$.

FIN DE LA CORRECTION