

Devoir n° 6, une correction

I - Résultats préliminaires

I.A

1. On procède par récurrence sur n . Le cas $n = 1$ est clair.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons l'inégalité vérifiée au rang n pour tous réels $x_1, \dots, x_n$.

Soit $x_1, \dots, x_{n+1}$, $n+1$ réels.

$$\begin{aligned}
 \left| \left(\prod_{k=1}^{n+1} (1 + x_k) \right) - 1 \right| &= \left| \left(\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \right) - 1 + x_{n+1} \prod_{k=1}^n (1 + x_k) \right| \\
 &\leq \left| \left(\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \right) - 1 \right| + \left| x_{n+1} \prod_{k=1}^n (1 + x_k) \right| \quad \text{inégalité triangulaire} \\
 &\leq \left(\prod_{k=1}^n (1 + |x_k|) \right) - 1 + |x_{n+1}| \prod_{k=1}^n (1 + |x_k|) \quad \text{hypothèse de récurrence} \\
 &\leq (1 + |x_{n+1}|) \left(\prod_{k=1}^n (1 + |x_k|) \right) - 1 \\
 &\leq \left(\prod_{k=1}^{n+1} (1 + |x_k|) \right) - 1
 \end{aligned}$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x \leq e^x$ par une simple étude de la fonction $x \mapsto e^x - x - 1$ ou par convexité de $\exp$ (courbe située au dessus de la tangente en 0) ou par croissance de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
 \text{— pour } x \geq 0, e^x - 1 &= \int_0^x e^t dt \geq \int_0^x 1 dt = x \\
 \text{— pour } x \leq 0, e^x - 1 &= - \int_x^0 e^t dt \geq - \int_x^0 1 dt = x.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, comme $1 + x_k \geq 0$ pour $x_k \in [-1, +\infty[$, on peut multiplier les inégalités $(1 + x_k) \leq e^{x_k}$ de $k = 1$ à n :

$$\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \leq \prod_{k=1}^n e^{x_k} = \exp \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)$$

I.B

3. Soit $t \in \mathbb{C}$, par développement en série entière de l'exponentielle puis inégalité triangulaire puis $k! \geq (k-2)!$:

$$|(1+t) - e^t| = \left| - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|t|^k}{k!} \leq |t|^2 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|t|^{k-2}}{(k-2)!} = |t|^2 e^{|t|}$$

4. On a par l'inégalité triangulaire :

$$|a^n - b^n| = \left| (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \right| \leq |a-b| \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{|a^k|}_{\leq M^k} \underbrace{|b|^{n-1-k}}_{M^{n-1-k}} \leq n M^{n-1} |a-b|$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $M = \max \left\{ \left| 1 + \frac{z}{n} \right|, \left| e^{\frac{z}{n}} \right| \right\}$. D'après les questions précédentes :

$$\left| \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n - e^z \right| = \left| \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n - \left(e^{\frac{z}{n}} \right)^n \right| \leq n M^{n-1} \left| 1 + \frac{z}{n} - e^{\frac{z}{n}} \right| \leq n M^{n-1} \left| \frac{z}{n} \right|^2 e^{\frac{|z|}{n}}$$

De plus, on a $\left|1 + \frac{z}{n}\right| \leq 1 + \frac{|z|}{n} \leq e^{\frac{|z|}{n}}$ et $|e^{\frac{z}{n}}| \leq e^{\frac{|z|}{n}}$ (obtenu par inégalité triangulaire et DSE de exp) donc

$$M \leq e^{\frac{|z|}{n}}$$

$$\left|\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n - e^z\right| \leq nM^{n-1} \left|\frac{z}{n}\right|^2 e^{\frac{|z|}{n}} \leq \frac{|z|^2}{n} e^{\frac{(n-1)|z|}{n}} e^{\frac{|z|}{n}} = \frac{|z|^2}{n} e^{|z|}$$

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 \leq |u_n - e^z| \leq \frac{|z|^2}{n} e^{|z|}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|z|^2}{n} e^{|z|} = 0$ il vient par sandwich :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - e^z| = 0 \quad \text{c'est à dire} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^z$$

II - Exemples de calcul de produit infini

II.A

7. • Soit $N \geq 2$ entier. On a :

$$\prod_{k=2}^N \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^N \frac{k^2 - 1}{k^2} = \prod_{k=2}^N \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{(N-1)!(N+1)!}{2(N!)^2} = \frac{1}{2} \frac{N+1}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$$

donc $\prod_{k=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{1}{2}$.

• Soit $N \geq 2$ entier. En séparant le produit pour $n = 2k$ (alors $n + (-1)^{n+1} = 2k - 1$) et $n = 2k - 1$ (alors $n + (-1)^{n+1} = 2k$) :

$$\prod_{n=2}^{2N} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) = \frac{1}{(2N)!} \prod_{n=2}^{2N} (n + (-1)^{n+1}) = \frac{1}{(2N)!} \prod_{k=1}^N (2k-1) \prod_{k=2}^N (2k) = \frac{1}{2}$$

Donc $\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) = \frac{1}{2}$

II.B

8. Voir cela dans un autre sujet... (IPP pour obtenir $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$)

9. On utilise la formule de Stirling :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{et} \quad (2n)! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi(2n)} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}$$

D'où

$$W_{2n+1} = \frac{2^{2n}}{(2n+1)} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{(2n)} \frac{2\pi n (n/e)^{2n}}{2\sqrt{\pi n} (2n/e)^{2n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

Puis, pour $n \geq 1$,

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{4k^2 - 1}\right) = \prod_{k=1}^n \frac{4k^2}{(2k-1)(2k+1)} = 4^n (n!)^2 \frac{\prod_{k=1}^n (2k)(2k)}{(2n)!(2n+1)!} = (2n+1)W_{2n+1}^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$$

Donc $\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{4n^2 - 1}\right) = \frac{\pi}{2}$.

III - Étude d'une fonction définie par un produit infini

III.A

10. Soit $x \in S$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Par inégalité triangulaire, on a :

$$|P_{n+1}(x) - P_n(x)| = |(1 + f_{n+1}(x))P_n(x) - P_n(x)| = |P_n(x)| |f_{n+1}(x)| \leq Q_n(x) |f_{n+1}(x)|.$$

D'après Q,2, on a : $Q_n(x) = \prod_{k=1}^n (1 + |f_k(x)|) \leq e^{\sum_{k=1}^n |f_k(x)|}$. En effet : $0 \leq 1 + |f_k(x)| \leq e^{|f_k(x)|}$.

On en déduit que : $Q_n(x) \leq e^{\sum_{k=1}^n |f_k(x)|} \leq e^{\sum_{k=1}^{+\infty} |f_k(x)|} = e^{F(x)}$.

On en conclut que : $|P_{n+1}(x) - P_n(x)| \leq Q_n(x) |f_{n+1}(x)| \leq e^{F(x)} |f_{n+1}(x)|$.

11. Soit $x \in S$ fixé. Montrons que la série $\sum_{k \geq 1} (P_{k+1}(x) - P_k(x))$ converge.

D'après Q.10, on a : $\forall k \in \mathbb{N}^*, |P_{k+1}(x) - P_k(x)| \leq e^{F(x)} |f_{k+1}(x)|$.

La série numérique $\sum_{k \geq 1} |f_{k+1}(x)|$ converge donc la série $\sum_{k \geq 1} (P_{k+1}(x) - P_k(x))$ converge absolument par comparaison.

Par dualité suite-série, on en déduit que $\boxed{(P_n(x))_{n \geq 1} \text{ converge, on note } P(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x)}$.

III.B

12. $\sum_{n \geq 1} |f_k|$ converge normalement sur S donc la série $\sum_{k \geq 1} \|f_k\|_{\infty, S}$ converge. Posons $M = \sum_{k=1}^{+\infty} \|f_k\|_{\infty, S}$.

Soit $x \in S$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Alors $F(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} |f_k(x)| \leq M$.

En utilisant la question 10, on en déduit que pour tout x dans S :

$$|P_{k+1}(x) - P_k(x)| \leq e^{F(x)} |f_{k+1}(x)| \leq \underbrace{e^M \|f_{k+1}\|_{\infty, S}}_{\text{indépendant de } x}$$

En passant à la borne supérieure lorsque x décrit S , on en déduit que : $\|P_{k+1} - P_k\|_{\infty, S} \leq e^M \|f_{k+1}\|_{\infty, S}$.

Or la série numérique $\sum_{k \geq 1} \|f_{k+1}\|_{\infty, S}$ converge donc la série $\sum_{k \geq 1} \|P_{k+1} - P_k\|_{\infty, S}$ converge par comparaison.

On en conclut que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} (P_{n+1} - P_n)$ converge normalement sur S .

13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in S$.

Par télescopage, on a : $\forall N \in \mathbb{N}, N \geq n, P_{N+1}(x) - P_n(x) = \sum_{k=n}^N (P_{k+1}(x) - P_k(x))$.

Quand $N \rightarrow +\infty$, on en déduit que $P(x) - P_n(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} (P_{k+1}(x) - P_k(x))$.

Par inégalité triangulaire, on obtient alors pour tout x dans S :

$$|P(x) - P_n(x)| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} |P_{k+1}(x) - P_k(x)| \leq \underbrace{\sum_{k=n}^{+\infty} \|P_{k+1} - P_k\|_{\infty, S}}_{\text{indépendant de } x}$$

En passant à la borne supérieure lorsque x décrit S , on en déduit que :

$$\|P - P_n\|_{\infty, S} \leq R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \|P_{k+1} - P_k\|_{\infty, S}.$$

Or R_n est le reste d'une série convergente donc $\lim R_n = 0$. On en déduit que $\lim \|P - P_n\|_{\infty, S} = 0$.

On en conclut que (P_n) converge uniformément vers P .

14. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in S$.

$$P_k(x) = \prod_{j=1}^k (1 + f_j(x)) \text{ donc } \lim_{x \rightarrow a} P_k(x) = \prod_{j=1}^k (1 + \ell_j) = L_k \in \mathbb{R}.$$

On va utiliser la relation : $P(x) \stackrel{(1)}{=} P_1(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} (P_{k+1} - P_k)$.

La série de fonctions $\sum_{k \geq 1} (P_{k+1} - P_k)$ converge normalement sur S donc d'après le théorème de la double limite,

quand $x \xrightarrow{S} a$ dans la relation (1), on peut dire que :

la série numérique $\sum_{k \geq 1} (L_{k+1} - L_k)$ converge et $\lim_{x \rightarrow a} P(x) \stackrel{(2)}{=} L_1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (L_{k+1} - L_k)$.

Par dualité suite-série, comme la série $\sum_{k \geq 1} (L_{k+1} - L_k)$ converge, la suite $(L_k)_{k \geq 1}$ converge vers $L = \prod_{k=1}^{+\infty} (1 + \ell_k)$ (qui est donc un produit infini convergent).

En utilisant la relation (2), on en déduit (par télescopage) que : $\lim_{x \rightarrow a} P(x) = L = \prod_{k=1}^{+\infty} (1 + \ell_k)$.

III.C

15. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n(x) = -e^{-nx^2}$. Nous allons appliquer la question précédente ; pour cela, nous devons vérifier toutes les hypothèses sur la suite (f_n) .

Soit $[a, b]$ un segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. On a

- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $x \in [a, b]$, $f_n(x) > -1$ car $e^{-nx^2} < 1$
- la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} |f_n|$ converge uniformément sur $[a, b]$ car :
 - $|f_n(x)| = e^{-nx^2} \leq e^{-na^2}$, d'où $\|f_n\|_\infty \leq e^{-na^2}$ et la série $\sum e^{-na^2}$ converge puisque $e^{-na^2} = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$ d'où la convergence normale de la série $\sum_{n \geq 1} |f_n|$ sur $[a, b]$.

Par conséquent, d'après les deux questions précédentes, f est bien définie et continue sur $[a, b]$ et ceci pour tout segment $[a, b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ donc f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

16. Soit x, y deux réels tels que $0 < x \leq y$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-nx^2 \geq -ny^2$ donc $1 - e^{-nx^2} \geq 1 - e^{-ny^2} \geq 0$, donc en multipliant ces inégalités :

$$\prod_{n=1}^N (1 - e^{-nx^2}) \geq \prod_{n=1}^N (1 - e^{-ny^2}) \quad \text{d'où} \quad f(x) \geq f(y) \text{ par passage à la limite } N \rightarrow +\infty$$

Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Limite en 0. On applique la question 2 :

$$\forall x > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \prod_{n=1}^N (1 - e^{-nx^2}) \leq \exp \left(\sum_{n=1}^N -e^{-nx^2} \right)$$

Or pour tout $x > 0$, $\sum_{n=1}^{+\infty} -e^{-nx^2} = \frac{-e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}}$ (série géométrique de raison $e^{-x^2} \in [0, 1[$) d'où par passage à la limite quand $N \rightarrow +\infty$:

$$\forall x > 0 \quad 0 \leq f(x) \leq \exp \left(\frac{-e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}} \right)$$

Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}} = -\infty$ d'où $\lim_{x \rightarrow 0^+} \exp \left(\frac{-e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}} \right) = 0$ donc par théorème d'encadrement :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

Limite en $+\infty$. On applique les questions 1 puis 2

$$\forall x > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \left| \left(\prod_{k=1}^n (1 - e^{-kx^2}) \right) - 1 \right| \leq \left(\prod_{k=1}^n 1 + | -e^{-kx^2} | \right) - 1 \leq \exp \left(\sum_{k=1}^n e^{-kx^2} \right) - 1$$

Donc par passage à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, en utilisant $\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-kx^2} = \frac{e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}}$,

$$\forall x > 0 \quad |f(x) - 1| \leq \exp\left(\frac{e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}}\right) - 1$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp\left(\frac{e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}}\right) = 1$ d'où par théorème d'encadrement :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x) - 1| = 0 \quad \text{soit} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

IV - Expression de la fonction sinus comme produit infini

17. Soit $x \in \mathbb{R}$.

D'après la question 6, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{ix}{2n+1}\right)^{2n+1} = e^{ix}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{ix}{2n+1}\right)^{2n+1} = e^{-ix}$ donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}) = \sin(x)$$

Donc la suite de fonctions polynomiales (P_n) converge simplement vers $\sin$ sur $\mathbb{R}$.

18. D'après la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned} P_n(X) &= \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \left(\frac{i^k}{(2n+1)^k} X^k - \frac{(-i)^k}{(2n+1)^k} X^k \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{i^{2n+1} - (-i)^{2n+1}}{(2n+1)^{2n+1}} X^{2n+1} + R(X) \right) \quad \text{avec } R \in \mathbb{R}_{2n}[X] \\ &= \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2n+1}} X^{2n+1} + R(X) \end{aligned}$$

Donc P_n est un polynôme de degré $2n+1$.

19. Soit $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$.

$$\begin{aligned} 2iP_n(x_k) &= \left(1 + \frac{ix_k}{2n+1}\right)^{2n+1} - \left(1 - \frac{ix_k}{2n+1}\right)^{2n+1} \\ &= \left(\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) + i \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \right)^{2n+1} - \left(\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) - i \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \right)^{2n+1} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} 2iP_n(x_k) &= \frac{1}{\cos^{2n+1}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \left(e^{\frac{ik\pi}{2n+1}(2n+1)} - e^{\frac{-ik\pi}{2n+1}(2n+1)} \right) \\ &= \frac{1}{\cos^{2n+1}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} (e^{ik\pi} - e^{-ik\pi}) = 0 \end{aligned}$$

Donc x_k est une racine de P_n pour tout $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$.

Mais $k \mapsto x_k$ est injective (par injectivité de la fonction tangente sur $[0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi[)$, donc l'ensemble $\{x_k, k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket\}$ contient $2n+1$ racines de P_n qui est un polynôme de degré $2n+1$; on a donc toutes les racines de P_n .

20. On va regrouper les racines x_k deux à deux, en remarquant que pour $1 \leq k \leq n$ on a $2n+1-k \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket$ et :

$$x_{2n+1-k} = (2n+1) \tan\left(\frac{(2n+1)\pi - k\pi}{2n+1}\right) = (2n+1) \tan\left(\pi - \frac{k\pi}{2n+1}\right) = -(2n+1) \tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = -x_k$$

D'après la question précédente, il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que

$$\begin{aligned}
 P_n(X) &= \mu \prod_{k=0}^{2n} (X - x_k) = \mu (X - x_0) \prod_{k=1}^n (X - x_k) \prod_{k=n+1}^{2n} (X - x_k) \\
 &= \mu X \prod_{k=1}^n (X - x_k) \prod_{k=1}^n (X - \underbrace{x_{2n+1-k}}_{=-x_k}) \quad \text{changement d'indices} \\
 &= \mu X \prod_{k=1}^n (X^2 - x_k^2) = \mu \prod_{k=1}^n (-x_k^2) X \prod_{k=1}^n \frac{X^2 - x_k^2}{-x_k^2} \\
 &= \underbrace{\mu (-1)^n \prod_{k=1}^n x_k^2}_{=\lambda} X \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{X^2}{x_j^2}\right)
 \end{aligned}$$

Il suffit de poser $\lambda = \mu (-1)^n \prod_{k=1}^n x_k^2$ pour obtenir l'égalité demandée.

21. En reprenant la définition de P_n , sachant que $P'_n(0)$ est le coefficient en X dans $P_n(X)$, on a :

$$P'_n(0) = \frac{1}{2i} \binom{2n+1}{1} \frac{i^1 - (-i)^1}{2n+1} = 1$$

De plus en dérivant P_n avec l'expression de la question Q22, en notant $Q_n(X) = \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{X^2}{x_j^2}\right)$:

$$P'_n(X) = \lambda (X Q'_n(X) + Q_n(X)) \quad \text{d'où} \quad P'_n(0) = \lambda Q_n(0) = \lambda$$

Donc $\lambda = P'_n(0) = 1$ d'où le résultat.

22. Comme $\frac{j\pi}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on a $(2n+1) \tan \frac{j\pi}{2n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (2n+1) \frac{j\pi}{2n+1}$ donc

$$(2n+1) \tan \frac{j\pi}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} j\pi$$

23. D'après l'égalité des accroissements finis, il existe c_x entre 0 et x tel que :

$$\tan x - \tan 0 = \tan'(c_x)(x - 0).$$

Ainsi $|\tan x| = |\tan'(c_x)| |x| = (1 + \tan^2 c_x) |x| \geq |x|$.

IV.B

24. Soient j dans $\mathbb{N}^*$. D'après la question 23, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|v_j(n)| \leq \frac{x^2}{\left((2n+1) \times \frac{j\pi}{2n+1}\right)^2} = \underbrace{\frac{x^2}{j^2 \pi^2}}_{\text{indépendant de } n}$$

Ainsi $\|v_j\|_{\infty, \mathbb{N}^*} \leq \frac{x^2}{j^2 \pi^2}$ qui est le terme général d'une série numérique convergente (Riemann) : la série de fonctions $\sum v_j$ converge normalement sur $\mathbb{N}^*$.

25. D'après la question 17 on a $P_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sin x$ et $P_n(x) = x \prod_{j=1}^{+\infty} (1 + v_j(n))$.

D'après la question 22, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on a $v_j(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\frac{x^2}{\pi^2 j^2}$

Avec le résultat de la question 24, on peut appliquer la question 14 : le produit infini $\prod_{j=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 j^2}\right)$ converge et on a :

$$\sin x = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) = x \prod_{j=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 j^2}\right)$$

V Autour de la fonction Γ

26. On applique le théorème de continuité des intégrales à paramètres. On note pour tout $t \in]0, +\infty[$, $x \in]0, +\infty[$, $f(x, t) = t^{x-1}e^{-t}$.
- pour tout $t > 0$, $x \mapsto f(x, t) = e^{(x-1)\ln(t)}e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$ par continuité de $\exp$.
 - pour tout $x \in [a, b] \subset]0, +\infty[$, pour tout $t > 0$,

$$|f(x, t)| \leq \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = \begin{cases} t^{a-1}e^{-t} & \text{si } 0 < t < 1 \\ t^{b-1}e^{-t} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

et φ est intégrable sur $]0, +\infty[$, car φ continue par morceaux sur $]0, +\infty[$ et :

- en 0 : $\varphi(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{t^{1-a}}$ et $1-a < 1$ et $t \mapsto \frac{1}{t^{1-a}}$ intégrable sur $]0, 1]$ (Riemann).
- en $+\infty$: $\varphi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissance comparée et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ intégrable en $+\infty$.

Par conséquent, Γ est continue sur $]0, +\infty[$.

27. On raisonne par récurrence sur n :

initialisation : $n = 1$, pour tout $x > 0$,

$$g_1(x) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)du = \left[\frac{u^x}{x} - \frac{u^{x+1}}{x+1} \right]_0^1 = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}.$$

hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons pour tout $x > 0$, $g_n(x) = \frac{n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)}$.

On effectue une intégration par parties (que je ne rédige pas) :

$$\begin{aligned} g_{n+1}(x) &= \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{n+1}du = \frac{n+1}{x} \int_0^1 u^x(1-u)^n du \quad (\text{IPP}) \\ &= \frac{n+1}{x} g_n(x+1) \\ &= \frac{n+1}{x} \frac{n!}{\prod_{k=0}^n (x+1+k)} \quad \text{hyp. de récurrence avec } x+1 \\ &= \frac{(n+1)!}{\prod_{k=0}^{n+1} (x+k)} \end{aligned}$$

28. Soit $x > 0$. On applique le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions (f_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \geq 0, \quad f_n(x) = \begin{cases} t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n & \text{si } t \leq n \\ 0 & \text{si } t > n \end{cases}$$

On a :

- pour $t > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = t^{x-1}e^{-t}$ par la question 6 ; la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t > 0$,

$$|f_n(t)| \leq t^{x-1}e^{-t} \quad \begin{cases} \text{évident} & \text{si } t > n \\ \text{d'après Q2} & \text{si } t \leq n \end{cases}$$

Et $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après la question 26

Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} dt = \Gamma(x)$$

29. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par le changement de variable affine $u = t/n$:

$$\int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \int_0^1 (nu)^{x-1} (1-u)^n n du = n^x g_n(x) = n^x \frac{n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)}$$

Donc par la question précédente

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^x \frac{n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)}$$

30. D'après la question 25, $\sin(\pi x) = \pi x \prod_{j=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{j^2}\right)$ et d'après la question précédente :

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)} \frac{n^{1-x} n!}{\prod_{k=0}^n (1-x+k)}$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)} \frac{n^{1-x} n!}{\prod_{k=0}^n (1-x+k)} &= \frac{n(n!)^2}{x \prod_{k=1}^n (x+k) \prod_{k=1}^n (k-x)} = \frac{1}{x} \left(\prod_{k=1}^n \frac{k^2}{(x+k)(k-x)} \right) \frac{n}{n+1-x} \\ &= \frac{n}{x(n+1-x)} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)^{-1} = \frac{n}{x(n+1-x)} \left(\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) \right)^{-1} \end{aligned}$$

Or $\frac{n}{x(n+1-x)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ donc par passage à la limite quand $n \rightarrow +\infty$:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left(\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) \right)^{-1} = \frac{1}{x} \left(\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) \right)^{-1} = \frac{1}{x} \frac{\pi x}{\sin(\pi x)} = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

31. On pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$. L'égalité demandée revient à montrer que la suite (u_n) est convergente. Pour cela, il suffit de montrer que la série télescopique associée $\sum u_{n+1} - u_n$ est convergente.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{-1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Donc $u_{n+1} - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est convergente donc la suite (u_n) converge, d'où l'existence de γ tel que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \gamma + o(1)$ c'est à dire :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$$

32. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)} = \frac{e^{x \ln(n)}}{x} \prod_{k=1}^n \frac{k}{x+k} = \frac{e^{x \left(\ln(n) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)}}{x} \prod_{k=1}^n e^{\frac{x}{k}} \left(1 + \frac{x}{k}\right)^{-1}$$

Et d'après la question précédente $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{x \left(\ln(n) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)} = e^{-\gamma x}$ d'où par passage à la limite et la question 29 :

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{x \left(\ln(n) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)}}{x} \prod_{k=1}^n e^{\frac{x}{k}} \left(1 + \frac{x}{k}\right)^{-1} = \frac{e^{-\gamma x}}{x} \prod_{k=1}^{+\infty} e^{\frac{x}{k}} \left(1 + \frac{x}{k}\right)^{-1}$$

FIN DE LE CORRECTION