Devoir n° 6

Pour le lundi 27 janvier 2024

*La **présentation** de la copie doit être correcte, les résultats mis en valeur et les feuilles numérotées.*
Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. La clarté, la précision et la concision de la rédaction entrent dans une part importante de l'évaluation.
Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun.

Dans ce problème, on introduit la notion de produit infini et on l'utilise pour obtenir diverses propriétés.

— La partie I permet d'obtenir des résultats qui seront utilisés dans tout le problème.
— La partie II étudie quelques exemples de calcul de produit infini, dont celui de Wallis, et donne par ailleurs une illustration en probabilités.
— La partie III permet de montrer, sous certaines conditions, la continuité ou le caractère $\mathcal{C}^1$ d ?une fonction définie par un produit infini de fonctions.
— La partie IV a pour but d ?exprimer la fonction sinus sous forme de produit infini et, en s'appuyant sur la partie III, d'en tirer quelques conséquences.
— Enfin, la partie V étudie la fonction Γ. Elle utilise quelques résultats des parties I, III et IV.

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n \geqslant p}$ une suite de nombres réels. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant p$,

$$P_n = \prod_{k=p}^{n} u_k.$$

On dit que la suite $(P_n)_{n \geqslant p}$ est la suite des produits partiels du produit infini $\prod\limits_{n \geqslant p} u_n$.

Si la suite $(P_n)_{n \geqslant p}$ converge, on dit que sa limite est la valeur du produit infini et on pose :

$$\prod_{k=p}^{+\infty} u_k = \lim_{n \to +\infty} P_n.$$

I - Résultats préliminaires

I.A

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$

1. Montrer que, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\left| \left(\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \right) - 1 \right| \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} (1 + |x_k|) \right) - 1.$$

On pourra démontrer cette formule par récurrence même si elle n'est pas utile par la suite.

2. Montrer que, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in [-1, +\infty[^n$,

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \leqslant \exp\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right).$$

I.B

Soit $z \in \mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $u_n = \left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n$. Le but de cette sous-partie est de montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers e^z.

3. En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{C}$,

$$|(1 + t) - \mathrm{e}^t| \leqslant |t|^2 \mathrm{e}^{|t|}$$

4. Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. On note $M = \max\{|a|, |b|\}$.
Montrer que $|a^n - b^n| \leqslant nM^{n-1}|a-b|$.

On pourra utiliser l'identité remarquable à connaître : $a^n - b^n = (a-b)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$.

Cette formule peut se déduire de $(1-x^n) = (1-x)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k$.

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\left|\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n - \mathrm{e}^z\right| \leqslant \dfrac{|z|^2}{n}\mathrm{e}^{|z|}$.
6. Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers e^z.

II - Exemples de calcul de produit infini

II.A

7. Calculer $\displaystyle\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ et $\displaystyle\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$.

On pourra, pour tout $N \geqslant 2$, établir une expression de $\displaystyle\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ *et* $\displaystyle\prod_{n=2}^{2N}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$.

II.B

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^n \, du.$$

8. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

9. Déterminer un équivalent de la suite $(W_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{4n^2-1}\right)$.

III - Étude d'une fonction définie par un produit infini

On considère dans cette partie :
— Une partie non vide S de $\mathbb{R}$.
— $(f_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de fonctions définies sur $\mathcal{S}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
— Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in \mathcal{S}$:

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(1+f_k(x)) \quad et \quad Q_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(1+|f_k(x)|).$$

On va voir que l'étude de la convergence d'un produit infini se ramène à l'étude de la convergence d'une série via le théorème de dualité suite-série.

III.A

On suppose que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}|f_k|$ converge simplement sur $\mathcal{S}$ et on note F sa somme :

$$\forall x \in S,\ F(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}|f_k(x)|.$$

10. En utilisant la question 2, montrer que pour tout $x \in \mathcal{S}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$|P_{n+1}(x) - P_n(x)| \leqslant Q_n(x)\ |f_{n+1}(x)| \leqslant \mathrm{e}^{F(x)}\ |f_{n+1}(x)|.$$

11. En déduire que la suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur S. On note par la suite :

$$\forall x \in S,\ P(x) = \prod_{k=1}^{+\infty}(1+f_k(x)) = \lim_{n\to+\infty} P_n(x).$$

III.B

On suppose que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} |f_k|$ converge normalement sur $\mathcal{S}$ et on note F sa somme.

12. En utilisant la question 10, montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1}(P_{n+1}-P_n)$ converge normalement sur S.
13. En déduire que la suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathcal{S}$ vers la fonction P.

    On démontrera que $P(x) - P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}(P_{k+1}(x) - P_k(x))$.
14. *Cette question est un peu délicate car le théorème de la double limite est au programme pour les séries mais pas pour les suites de fonctions. Vous pouvez donc éventuellement admettre le résultat.*

    Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un point adhérent à S (a est limite d'une suite de réels appartenant à S).
    On suppose que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \lim_{x\to a} f_k(x) = \ell_k \in \mathbb{R}$.

    Montrer que le produit infini $\prod_{k\geqslant 1}(1+\ell_k)$ converge et que $\lim_{x\to a} P(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}(1+\ell_k)$.

    On utilisera que $P(x) - P_1(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(P_{k+1}-P_k)$ *et le théorème de la double limite pour les séries.*

III.C

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on pose $f(x) = \displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \mathrm{e}^{-nx^2}\right)$.

15. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^\star$.
16. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+^\star$ puis calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

IV - Expression de la fonction sinus comme produit infini

Pour écrire la fonction sinus comme un produit infini, on va exploiter que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin x = \frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i} \qquad \text{et} \qquad \forall z \in \mathbb{C},\ \mathrm{e}^z = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n.$$

IV.A

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$P_n(X) = \frac{1}{2i}\left(\left(1+\frac{iX}{2n+1}\right)^{2n+1} - \left(1-\frac{iX}{2n+1}\right)^{2n+1}\right).$$

17. Montrer que la suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction sinus.

Dans les questions 18 à 21, on fixe un entier naturel n. On souhaite factoriser le polynôme $P_n(X)$.

18. Montrer que P_n est un polynôme de degré $2n+1$.
19. Pour tout $k \in \{-n, \ldots, n\}$, on note $x_k = (2n+1)\tan\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)$.

    Montrer que l'ensemble des racines de P_n est $\big\{x_k \mid k \in \{-n,\ldots,n\}\big\}$.
20. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que : $P_n(X) = \lambda X \displaystyle\prod_{j=1}^{n}\left(1 - \frac{X^2}{x_j^2}\right)$.

21. En calculant $P_n'(0)$, montrer que $\lambda = 1$. On en déduit donc que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = x \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{\left((2n+1) \tan\left(\frac{j\pi}{2n+1} \right) \right)^2} \right).$$

22. Soit $j \in \{1, \dots, n\}$. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \left((2n+1) \tan\left(\frac{j\pi}{2n+1} \right) \right)$.

23. Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Montrer que $|\tan(x)| \geqslant |x|$. *On pensera à la formule de accroissement finis.*

IV.B

Dans cette sous-partie, on fixe un réel x. On veut démontrer que $\lim_{n \to +\infty} P_n(x) = x \prod\limits_{j=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{(j\pi)^2} \right)$. Dans l'expression de $P_n(x)$ obtenue en la question 21, l'entier n est présent dans la borne supérieure du produit.
Pour pouvoir utiliser Q.14, il faut s'affranchir de ce n.
Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $v_j : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \text{si } j > n \text{ alors } v_j(n) = 0 \quad \text{et} \quad \text{si } j \leqslant n \text{ alors } v_j(n) = \frac{-x^2}{\left((2n+1) \tan\left(\frac{j\pi}{2n+1} \right) \right)^2}.$$

On en déduit alors que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_n(x) = x \prod\limits_{j=1}^{+\infty} (1 + v_j(n))$.

24. En utilisant la question 23, montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{j \geqslant 1} v_j(\cdot)$ converge normalement sur $\mathbb{N}^*$.

25. Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_j(n)$. En utilisant la question 14 et la question 17, en déduire que

$$\boxed{\sin(x) = x \prod_{j=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{(j\pi)^2} \right)}.$$

V Autour de la fonction Γ

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on pose $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\, dt$.

26. Montrer que Γ est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}_+^\star$.

    Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on pose $g_n(x) = \displaystyle\int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n\, du$.

27. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $g_n(x) = \dfrac{n!}{\prod\limits_{k=0}^{n} (x+k)}$

28. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $\lim_{n \to +\infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \dfrac{t}{n} \right)^n dt = \Gamma(x)$.

29. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $\Gamma(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^x n!}{\prod\limits_{k=0}^{n} (x+k)}$.

30. Soit $x \in]0,1[$. Montrer que $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}$.

31. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \underset{n \to +\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$.

32. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $\Gamma(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\gamma x}}{x} \prod\limits_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{\frac{x}{n}} \left(1 + \dfrac{x}{n} \right)^{-1}$.

Fin de l'énoncé