Devoir n° 5, une correction

Partie I - Exemples et propriétés

1. a) Lorsque f est positive sur $[a,+\infty[$ on a : $\boxed{(i) \Leftrightarrow (ii)}$.

   b) Si f n'est pas positive sur $[a,+\infty[$, on n'a plus que $\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$.

2. a) Tout d'abord E est non vide puisqu'il contient la fonction nulle. Prenons maintenant f, g dans E ainsi que α réel.

   — La fonction $f+\alpha g$ est continue.

   — Pour tout t dans $[0,+\infty[$ on a : $|f(t)+\alpha g(t)| \leqslant |f(t)| + |\alpha|\ |g(t)|$.
   Mais si $x>0$ réel, les fonctions $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ et $t \mapsto g(t)\mathrm{e}^{-xt}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$ donc $t \mapsto (|f(t)| + |\alpha|\ |g(t)|)\,\mathrm{e}^{-xt}$ l'est aussi. Par domination, $t \mapsto (f(t)+\alpha g(t))\,\mathrm{e}^{-xt}$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

   Ainsi $f+\alpha g$ est dans E.

   Il en résulte que E est sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}([0,+\infty[,\mathbb{R})$: $\boxed{E \text{ est un espace vectoriel}}$.

   b) F est non vide. Puis si $f \in F$, il existe M dans $\mathbb{R}^+$ tel que $|f(t)| \leqslant M$ pour tout t dans $[0,+\infty[$.
   Soit $x>0$ réel. Pour tout t dans $[0,+\infty[$ on a alors :

   $$\left|f(t)\mathrm{e}^{-xt}\right| \leqslant M\mathrm{e}^{-xt}$$

   Mais $t \mapsto \mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (par exemple en prenant une primitive...) avec $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$: par domination $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et ainsi $f \in E$.

   Puis toute combinaison linéaire d'éléments de F est encore un élément de F...

   c) C'est la linéarité de l'intégrale.

3. a) On a pour tout $x>0$, $\boxed{\mathcal{L}(\mathcal{U})(x) = \dfrac{1}{x}}$.

   b) Notons que h_λ est continue sur $[0,+\infty[$. Puis soit $x>0$. Pour $t \geqslant 0$ on a :

   $$h_\lambda(t)\mathrm{e}^{-xt} = \mathrm{e}^{-(x+\lambda)t}$$

   et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x+\lambda)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x+\lambda}$ donc h_λ est dans E et :

   $$\boxed{\mathcal{L}(h_\lambda)(x) = \frac{1}{x+\lambda}} \text{ pour tout } x>0$$

4. a) Par croissance comparée on a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^n\mathrm{e}^{-\frac{tx}{2}} = 0$ i.e. $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{t^n\mathrm{e}^{-tx}}{\mathrm{e}^{-\frac{tx}{2}}} = 0$.
   Ainsi il existe $A \geqslant 0$ tel que pour tout $t \geqslant A$ on ait $\dfrac{t^n\mathrm{e}^{-tx}}{\mathrm{e}^{-\frac{tx}{2}}} \leqslant 1$, c'est à dire : $t^n\mathrm{e}^{-tx} \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{tx}{2}}$.

b) Soit $x>0$. La fonction $g_n^{(f)}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $t \geqslant A_x$ on a :

$$\left|g_n^{(f)}(t)\mathrm{e}^{-xt}\right| = \left|t^n f(t)\mathrm{e}^{-xt}\right| \leqslant |f(t)|\,\mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}}.$$

Or f est dans E donc $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}}$ est intégrable sur $[A_n, +\infty[$ donc sur $\mathbb{R}^+$.

Ainsi $g_n^{(f)}$ est un élément de E.

5. **Transformée de Laplace d'une dérivée**
Remarquons que f' est continue puisque f est de classe C^1. Soit $x>0$. Pour tout $X>0$ on a :

$$\begin{aligned}\int_0^X f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \underbrace{=}_{IPP} & \left[-f(t)\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{x}\right]_0^X + \frac{1}{x}\int_0^X f'(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \\ = & -f(X)\frac{\mathrm{e}^{-xX}}{x} + \frac{f(0)}{x} + \frac{1}{x}\int_0^X f'(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Il en résulte que $\exists \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^X f'(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = -\dfrac{f(0)}{x} + L(f)$. Comme la fonction f est croissante, $f' \geqslant 0$ et ainsi f' est bien dans E avec :

$$\boxed{\mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)} \text{ pour tout } x \text{ dans }]0,+\infty[$$

6. **Régularité d'une transformée de Laplace**

a) Soit $a>0$. On pose $h(x,t) = f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ pour $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_+^*$.

— Pour tout $x>0$ la fonction $h(x,.) : t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
— Pour tout $t \geqslant 0$, la fonction $h(.,t) : x \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ avec :

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -tf(t)\mathrm{e}^{-tx}.$$

— Pour tout $x>0$ la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
— Soit $a>0$. Pour tout $t \geqslant 0$ $x>a$, on a :

$$\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant t\,|f(t)|\,\mathrm{e}^{-at}$$

et $t \mapsto t\,|f(t)|\,\mathrm{e}^{-at}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (question 4).

Les hypothèse du théorème de dérivation des intégrales à paramètre sont vérifiées : la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$, avec dérivation sous le symbole intégral. Ceci étant vrai pour tout $a>0$, on peut affirmer que $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ avec dérivation sous le symbole intégrale : $\mathcal{L}(f)' = -\mathcal{L}(g_1^{(f)})$.

b) On procède par récurrence sur $n \geqslant 1$, récurrence qui est initialisée avec la question précédente. Supposons que pour un certain $n \geqslant 1$ fixé la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^n avec $\mathcal{L}(f)^{(n)} = (-1)^n\mathcal{L}(g_n^{(f)})$ alors, puisque g_n est dans E, $\mathcal{L}(g_n^{(f)})$ est C^1 selon la question précédente avec $\mathcal{L}(g_n)' = -\mathcal{L}(\mathrm{Id} \times g_n^{(f)}) = -\mathcal{L}(g_{n+1}^{(f)})$ ce qui démontre que $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^{n+1}. En conclusion $\mathcal{L}(f)$ est C^∞ avec pour $n \geqslant 1$ entier :

$$\boxed{\mathcal{L}(f)^{(n)} = (-1)^n\mathcal{L}(g_n^{(f)})}$$

Partie II - Comportements asymptotiques de la transformée de Laplace

7. a) Soit M qui borne f sur $\mathbb{R}^+$. Pour tout $x>0$ on a : $|\mathcal{L}(f)(x)| \leqslant M\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \dfrac{M}{x}$ donc, par sandwich, $\boxed{\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0}$.

b) **Théorème de la valeur initiale**
On peut appliquer le résultat de la question 5 à bon droit : f' est dans E et $\mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)$ pour tout $x > 0$. Selon la question précédente, puisque f' est dans F, on obtient :

$$\boxed{\exists \lim_{x\to+\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = f(0)}.$$

8. **Théorème de la valeur finale**

a) Il faut montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}^+$. Comme $\lim_{t\to+\infty} f(t) = \ell$ il existe A réel positif tel que pour tout $x \geqslant A$ on ait $|g(x) - \ell| \leqslant 1$ donc $|g(x)| \leqslant |\ell| + 1$. Puis la fonction f est <u>**continue**</u> sur le <u>**segment**</u> $[0, A]$: elle y est donc bornée par un réel M. On a alors pour tout x dans $\mathbb{R}^+$:

$$|f(x)| \leqslant \max(M, |\ell| + 1)$$

b) • Soit $x > 0$. Via le changement de variable affine $u = xt$ on a :

$$x\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} xf(t)\mathrm{e}^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \underbrace{\mathrm{e}^{-t} f(\tfrac{t}{x})}_{=h(x,t)}\,\mathrm{d}t.$$

• Puis on a :

— Pour tout $t > 0$ réel on a : $\lim_{x\to+\infty} h(x,t) = \ell\mathrm{e}^{-t} = \lambda(t)$;
— Les fonctions $t \mapsto \lambda(t)$ et $t \mapsto h(x,t)$ sont continues sur $\mathbb{R}^+$.
— Pour tout $x > 0$ et tout $t \geqslant 0$ on a, lorsque M est un réel qui borne f :

$$|h(x,t))| \leqslant M\mathrm{e}^{-t},$$

et $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Les deux points précédents permettent d'appliquer le **théorème de convergence dominée de Lebesgue à paramètre continu** qui affirme que $\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} h(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \ell\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \ell$ donc :

$$\lim_{x\to+\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = \ell.$$

c) Pour $\ell \neq 0$, on a : $\boxed{\mathcal{L}(f)(x) \underset{x\to0}{\sim} \frac{\ell}{x}}$.

9. On a :

— Pour tout $t > 0$ réel on a : $\lim_{x\to0} f(t)\mathrm{e}^{-xt} = f(t)$;
— Les fonctions f et $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ sont continues sur $\mathbb{R}^+$.
— Pour tout $x > 0$ et tout $t \geqslant 0$ on a :

$$\left|f(t)\mathrm{e}^{-xt}\right| \leqslant f(t)$$

et f est supposée intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Le théorème de convergence dominée à paramètre continu s'applique : $\mathcal{L}_f(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Ainsi $\mathcal{L}(f)$ est prolongeable par continuité en 0 en posant : $\mathcal{L}_f(0) = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

10. a) • Soit $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Comme f est <u>**continue**</u>, le **théorème fondamental** assure que F est de classe C^1 avec $F' = f$. Mais pour tout $x \geqslant 0$ on a :

$$R(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - F(x)$$

donc R est de classe C^1 avec $R' = -F' = -f$.

- Soit $x > 0$. On a : $\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t == \{-R(t)\mathrm{e}^{-xt}]_0^{+\infty} - x\int_0^{+\infty} R(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$.
Ceci est correct à posteriori car $R(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et ainsi R est bornée sur $[0, +\infty[$ (voir question 8a). Ainsi $\mathcal{L}(f)(x) = R(0) - x\mathcal{L}(R)(x)$.

b) Le théorème de la valeur finale s'applique à $\mathcal{L}(R)$:

$$x\mathcal{L}(R)(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

On peut donc prolonger la fonction $\mathcal{L}(f)$ en 0 en posant $\mathcal{L}(f)(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

11. **Une application : calcul de l'intégrale de Dirichlet**

a) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$. Puis, si $X > 0$, une intégration par partie donne :

$$\begin{aligned}\int_1^X \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t &= \left\{\frac{-\cos t}{t}\right]_1^X - \int_0^X \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\cos 1}{X} - \frac{\cos X}{X} - \int_1^X \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Mais la fonction cos est bornée sur $\mathbb{R}$ d'où $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{\cos X}{X} = 0$ et pour tout $t \geqslant 1$ réel on a $\left|\dfrac{\cos t}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ donc $t \mapsto \dfrac{\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. Il en résulte que $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \int_1^X \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}$, autrement dit l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

b) Le changement de variable $t = u + n\pi$ donne pour tout $n \geqslant 1$ entier :

$$u_n = \int_0^\pi \frac{|\sin(u+n\pi)|}{u+n\pi}\,\mathrm{d}u = \int_0^\pi \frac{\sin u}{u+n\pi}\,\mathrm{d}u \geqslant \frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^\pi \sin u\,\mathrm{d}u = \frac{2}{(n+1)\pi}$$

donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ diverge.

La fonction f n'est donc pas intégrable sur $[\pi, +\infty[$.

c) • La fonction $t \mapsto (\sin t)\,\mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car continue sur $\mathbb{R}$ et dominée par $t \mapsto \mathrm{e}^{-xt}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

• Notons $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\sin t)\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$. Deux IPP successives donnent : $(1+x^2)I = 1$ et ainsi $I = \dfrac{1}{1+x^2}$.

d) Pour tout $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin t\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$ n'est autre que $-\mathcal{L}(f)'(x)$ donc on a

$$\mathcal{L}(f)(x) = -\arctan x + C$$

où C est une constante. Mais $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0$ donc $C = \dfrac{\pi}{2}$ et on a vu aussi (question 10)que :

$$\lim_{x\to 0} \mathcal{L}(f)(x) = \frac{\pi}{2}$$

Partie III - Injectivité de la transformation de Laplace

12. **Le théorème des moments**
Par combinaison linéaire, si P est un polynôme à coefficients réels, on obtient :

$$\int_a^b P(t)h(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Prenons alors une suite (P_k) dans $\mathbb{R}[X]$ qui converge uniformément vers h sur le segment $[a,b]$. Il vient $P_k h \xrightarrow[{[a,b]}]{CU} h^2$ et ainsi :

$$\lim_{k\to+\infty} \underbrace{\int_a^b P_k(t)h(t)\,\mathrm{d}t}_{=0} = \int_a^b h(t)^2\,\mathrm{d}t$$

Par unicité de la limite, on obtient : $\displaystyle\int_a^b h(t)^2\,\mathrm{d}t = 0$. Comme h^2 est continue et positive, on peut affirmer que $h = 0$ sur $[a,b]$.

13. a) Soit $x > 0$. Le changement de variable $t = -\ln u$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$ donne de suite :

$$(\heartsuit) \qquad \boxed{\int_0^1 u^{x-1}g(u)\,\mathrm{d}u = 0 \quad \text{pour tout } x > 0}$$

b) • La fonction G est, puisque g est continue sur $]0,1]$, de classe C^1 sur $]0,1]$ avec $G' = g$. Soit $n \geqslant 0$. Une intégration par parties formelle (les intégrales en jeu sont impropres en 0) donne alors :

$$0 = \int_0^1 u^{n+1}g(u)\,\mathrm{d}u = \{u^nG(u)]_0^1 - (n+1)\int_0^1 u^nG(u)\,\mathrm{d}u.$$

Mais en prenant $x = 1$ dans $(\heartsuit)$, on obtient $\displaystyle\int_0^1 g(u)\,\mathrm{d}u = 0$: la fonction G se prolonge donc par continuité en 0. Il en résulte que $\displaystyle\lim_{u\to 0} u^nG(u) = 0$. L'intégration par partie ci-dessus est donc correcte.

On obtient alors : $\boxed{\displaystyle\int_0^1 u^nG(u)\,\mathrm{d}u = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$.

• On applique le théorème des moments à la fonction G (que l'on a prolongé par continuité en 0) : pour tout t dans $[0,1]$ on a $G(t) = 0$. En dérivant, il vient $g(t) = 0$ pour tout t dans $]0,1]$: la fonction f est nulle. L'application linéaire $\mathcal{L}$ a donc un noyau réduit à $\{0\}$: elle est injective.

Fin de la correction