Devoir n° 4

Pour le mercredi 27 novembre

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*La **présentation** de la copie doit être correcte, les résultats mis en valeur et les feuilles numérotées. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. La clarté, la précision et la concision de la rédaction entrent dans une part importante de l'évaluation.*

Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun.

Exercice 1

Dans cet exercice, $n \geqslant 2$ est un entier. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant n valeurs propres distinctes.

1. Montrer que la famille $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ est libre.
2. On note $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) / AM = MA\}$. Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de dimension $\geqslant n$.
3. Montrer l'existence d'une matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible et d'une matrice Δ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale, telles que $A = P\Delta P^{-1}$.
4. Soit $M \in \mathcal{C}$.
   a) Montrer que tout vecteur colonne propre de A est un vecteur colonne propre de M.
   b) En déduire que la matrice $P^{-1}MP$ est diagonale.
   c) En déduire que $\mathcal{C}$ est de dimension $\leqslant n$.
5. Montrer que $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ est une base de $\mathcal{C}$.
6. On suppose ici que $n = 2$ et que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On note $\mathcal{R} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) / M^2 = A\}$.
   a) Montrer que $\mathcal{R} \subset \text{vect}(I, A)$.
   b) Montrer que $\mathcal{R}$ est de cardinal 4. Déterminer les 4 matrices vérifiant $M^2 = A$.

Exercice 2

L'objectif de l'exercice est d'étudier des conditions pour que deux matrices admettent un **vecteur propre commun**. =

Il est demandé, lorsqu'un raisonnement utilise un résultat obtenu précédemment dans le problème, d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Notations et définitions

Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Notons $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$,, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, 0_n la matrice nulle d'ordre n et I_n la matrice identité d'ordre n.
Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on note :

— $\ker(M) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \text{ tel que } MX = 0\}$,
— $\text{Im}\,(M) = \{MX,\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\}$,
— $\text{Spec}(M)$ le spectre de M,
— $E_\lambda(M) = \ker(M - \lambda I_n)$
— $\text{Im}_{\,\lambda}(M) = \text{Im}\,(M - \lambda I_n)$

Définitions :

— Soient $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ et $\underline{e} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$;
on dit que $\underline{e}$ est un **vecteur propre commun** à A et B si :

- $\underline{e} \neq 0$;
- il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A\underline{e} = \lambda\underline{e}$;
- il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $B\underline{e} = \mu\underline{e}$;

On définit $[A,B] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par la formule : $[A,B] = AB - BA$.

— Soient f et g, deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$- espace vectoriel E et $\underline{e} \in E$;
on dit de même que $\underline{e}$ est un **vecteur propre commun** à f et g si :

- $\underline{e} \neq 0$;
- il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(\underline{e}) = \lambda\underline{e}$;
- il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $g(\underline{e}) = \mu\underline{e}$;

— On définit l'endomorphisme $[f,g]$ de E par la formule : $[f,g] = f \circ g - g \circ f$.

Partie I - Étude dans un cas particulier

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{F} = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3)$ où $\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\underline{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On note aussi $\underline{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\underline{u}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1. a. Déterminer le spectre de A.
   b. Vérifier que la famille $\mathcal{F}$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.
   c. A est-elle diagonalisable ?
   d. Montrer qu'aucun des éléments de $\mathcal{F}$ n'est un vecteur propre commun à A et B.
2. a. Déterminer le spectre de B.
   b. Montrer que $\mathrm{Im}\ _2(B) = \mathrm{vect}(\underline{u}_4)$ et que $\dim(E_2(B)) = 2$.
   c. B est-elle diagonalisable ?
3. a. Montrer que $E_1(A) \cap E_2(B) = \mathrm{vect}(\underline{u}_5)$.
   b. Déterminer tous les vecteurs propres communs à A et B.
4. a. Vérifier que $[A,B] = C$.
   b. Montrer que C est semblable à la matrice D et déterminer le rang de C.

Partie II - Condition nécéssaire et suffisante

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$.

5. Dans cette question, on suppose que $\underline{e}$ est un vecteur propre commun à A et B.
   a. Montrer que $\underline{e} \in \ker([A,B])$.
   b. Vérifier que $\mathrm{rg}([A,B]) < n$.

Dans toute la suite de cette partie II, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

On dit que A et B vérifient la **propriété** $\mathcal{H}$ s'il existe $\lambda \in \operatorname{Spec}(A)$ tel que :

$$E_\lambda(A) \subset \ker([A, B]).$$

6. Montrer que si $[A, B] = 0_n$, alors A et B vérifient la propriété $\mathcal{H}$.
7. Dans cette question, on suppose que A et B vérifient la propriété $\mathcal{H}$.
   a. Pour tout $X \in E_\lambda(A)$, on pose $\psi(X) = BX$. Montrer que ψ définit un endomorphisme de $E_\lambda(A)$.
   b. En déduire l'existence d'un vecteur propre commun à A et B.

   Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}_k$ **la propriété suivante** :

   pour tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension k et pour tout couple d'endomorphismes (φ, ψ) de E tels que $\operatorname{rg}([\varphi, \psi]) \leqslant 1$, il existe un vecteur propre commun à φ et ψ.
8. Vérifier la propriété $\mathcal{P}_1$.
9. Dans cette question, on suppose que $\mathcal{P}_k$ **est vérifiée pour tout entier** $k \in [\![1, n-1]\!]$ et que A et B **ne vérifient pas la propriété** $\mathcal{H}$.
   On note $C = [A, B]$, on suppose que $\operatorname{rg}(C) = 1$ et on considère $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A.
   a. Justifier l'existence de $\underline{u} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $A\underline{u} = \lambda \underline{u}$ et $C\underline{u} \neq 0$.
   b. Vérifier que $\operatorname{Im}(C) = \operatorname{vect}(\underline{v})$ où $\underline{v} = C\underline{u}$.
   c. Montrer que $\operatorname{Im}(C) \subset \operatorname{Im}_\lambda(A)$.
   d. Établir les inégalités suivantes : $1 \leqslant \dim(\operatorname{Im}_\lambda(A)) \leqslant n - 1$.

   Pour tout $X \in \operatorname{Im}_\lambda(A)$, *on pose* $\varphi(X) = AX$ *et* $\psi(X) = BX$.
   e. Montrer que $[A, A - \lambda I_n] = 0_n$ et $[B, A - \lambda I_n] = -C$.
   En déduire que φ et ψ définissent des endomorphismes de $\operatorname{Im}_\lambda(A)$.
   f. Montrer l'existence d'un vecteur propre commun à φ et ψ ; en déduire qu'il en est de même pour A et B.
10. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Fin de l'énoncé