

Devoir n° 3, facultatif. Une correction

I - Existence et propriétés élémentaires de l'opérateur U

1. a. • La fonction $\phi : x \mapsto e^{-ax}y(x)$ est dérivable sur I comme produit de fonctions dérivables sur I . Pour x dans I on a :

$$\phi'(x) = (y'(x) - ay(x))e^{-ax}.$$

- Supposons qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que :

$$(\forall x \in I) \left(y(x) = e^{ax} \left(K - \int_1^x e^{-at} f(t) dt \right) \right).$$

Comme $t \mapsto e^{-at}f(t)$ est continue sur I , le théorème fondamental assure que la fonction

$$\Phi : x \mapsto \int_1^x e^{-at} f(t) dt$$

est de classe C^1 sur I avec $\Phi'(x) = e^{-ax}f(x)$. Ainsi, y est de classe C^1 sur I (par produit) et on a, pour x dans I :

$$y'(x) = ay(x) - e^{ax}\Phi'(x) = ay(x) + e^{ax}e^{-ax}f(x) = ay(x) - f(x).$$

Ainsi y est solution du problème (E_f) .

- Supposons maintenant que y soit solution du problème (E_f) . Alors la fonction $x \mapsto y(x)e^{-ax} + \int_1^x e^{-at} f(t) dt$, définie sur I , de classe C^1 . On la dérive et on trouve de suite que sa dérivée est nulle : comme I est un intervalle, c'est une fonction constante.

Conclusion. La fonction y est solution du problème (E_f) si et seulement s'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que :

$$(\forall x \in I) \left(y(x) = e^{ax} \left(K - \int_1^x e^{-at} f(t) dt \right) \right).$$

- b. Supposons que y_1 et y_2 soient deux solutions bornées de (E_f) . Il existe donc K_1 et K_2 réels tels que pour tout x dans I on ait :

$$\begin{cases} y_1(x) = e^{ax} \left(K_1 - \int_1^x e^{-at} f(t) dt \right) \\ y_2(x) = e^{ax} \left(K_2 - \int_1^x e^{-at} f(t) dt \right) \end{cases}$$

Pour x dans I , on a alors :

$$y_1(x) - y_2(x) = (K_1 - K_2)e^{ax}.$$

Mais, comme y_1 et y_2 sont bornées, il en va de même de $y_1 - y_2$. Cela force $K_1 = K_2$, puisque dans le cas contraire on aurait l'absurdité

$$|y_1(x) - y_2(x)| = \underbrace{|K_1 - K_2|}_{>0} e^{ax} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Il en résulte que $y_1 = y_2$.

Conclusion. S'il existe une solution de (E_f) qui soit bornée sur I , celle-ci est unique.

- c. La fonction $t \mapsto e^{-at}f(t)$ est continue sur $[1, +\infty[$ et f est bornée par un réel positif M sur $[1, +\infty[$. Ainsi pour tout t dans $[1, +\infty[$ on a :

$$|e^{-at}f(t)| \leq Me^{-at}.$$

Or, en prenant une primitive, $\int_1^{+\infty} e^{-at} dt$ converge de valeur $\int_1^{+\infty} e^{-at} dt = \frac{e^{-a}}{a}$. Par domination,

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_1^{+\infty} e^{-at}f(t) dt \text{ est absolument convergente donc convergente}}.$$

- d. • Montrons que g est solution de (E_f) . Pour x réel, posons $R(x) = \int_x^{+\infty} e^{-at}f(t) dt$. Avec les notations utilisées dans les questions précédentes, on a pour tout x réel :

$$R(x) + \Phi(x) = \int_1^{+\infty} e^{-at}f(t) dt$$

Ainsi $R = -\Phi + \int_1^{+\infty} e^{-at}f(t) dt$. Comme on a vu que Φ est de classe C^1 sur I , R est de classe C^1 sur I . Pour x dans I on a de plus :

$$R'(x) = -\Phi'(x) = e^{-ax}f(x).$$

Ainsi g est de classe C^1 sur I et on a, pour x dans I :

$$\begin{aligned} g'(x) - ag(x) + f(x) &= ae^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at}f(t) dt + e^{ax}e^{-ax}f(x) - ae^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at}f(t) dt + f(x) \\ &= 0, \end{aligned}$$

ce qui démontre que $\boxed{g \text{ est solution de } (E_f)}$.

Autre méthode. On écrit, pour x dans I :

$$g(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at}f(t) dt = e^{ax} \left(\underbrace{\int_1^{+\infty} e^{-at}f(t) dt}_{=K \in \mathbb{R}} - \int_1^x e^{-at}f(t) dt \right).$$

Selon la question 1a, la fonction g est solution du problème (E_f) .

- Montrons maintenant que g est bornée sur I . Comme f est bornées sur I il existe M dans $\mathbb{R}^+$ tel que pour tout $t \geq 1$ on ait :

$$|f(t)| \leq M.$$

Pour tout x dans I on a alors :

$$\begin{aligned} |g(x)| &= e^{ax} \left| \int_x^{+\infty} e^{-at}f(t) dt \right| \leq e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} |f(t)| dt \\ &\leq Me^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} dt = Me^{ax} \frac{e^{-ax}}{a} = \frac{M}{a}. \end{aligned}$$

D'après la question précédente, il ne peut exister qu'une seule solution de (E_f) bornée sur I .

Conclusion. $g : x \mapsto e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at}f(t) dt$ est l'unique solution du problème (E_f) qui soit bornée sur I .

2. Linéarité de U

- a. Lorsque $f = 1$, on a, pour tout $x \in I$ (en utilisant les calculs faits à la question précédente) :

$$U(f)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} dt = \frac{1}{a}.$$

Conclusion. $\boxed{U(1) \text{ est la fonction constante de valeur } \frac{1}{a}}.$

- b. • Si $f \in E$, $U(f)$ est, par définition, la seule solution bornée sur I de (E_f) . En particulier $U(f)$ est de classe C^1 (donc continue) et est bornée sur I . Il en résulte que $U(f) \in E$.

• La fonction U est immédiatement linéaire, par linéarité de l'intégrale. Précisons tout de même. Soient f et g dans E ainsi que λ réel. Pour tout x dans I on a :

$$\begin{aligned} U(f + \lambda g)(x) &= e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} [f(t) + \lambda g(t)] dt = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt + \lambda e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} g(t) dt \\ &= U(f)(x) + \lambda U(g)(x) \end{aligned}$$

Il en résulte que l'on a l'égalité de fonctions : $\boxed{U(f + \lambda g) = U(f) + \lambda U(g)}$.

Conclusion. $\boxed{U \text{ est un endomorphisme de } E}$.

- c. Soit f dans $\ker U$. On a donc $U(f) = 0$. Mais, par définition de $U(f)$, $U(f)$ est C^1 et solution de (E_f) donc, pour tout x dans I on a :

$$0 = U(f)'(x) = aU(f)(x) - f(x) = -f(x).$$

Il en résulte que f est la fonction nulle.

Conclusion. $\boxed{U \text{ est injectif}}$.

- d. On procède par récurrence sur $n \geq 0$ pour montrer la propriété : « pour tout f dans E et pour tout x dans I on a »

$$U^{n+1}(f)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t) dt. \text{ »}$$

- La définition de $U(f)$ et la question **I-1d** affirment que le résultat est vrai pour $n = 0$.
- Supposons la propriété vraie pour un certain entier $n \geq 0$. On a donc, pour tout x dans I et tout f dans E :

$$U^{n+1}(f)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t) dt.$$

Soit f dans E . Pour $x \in I$, puisque $U(f) \in E$, on a donc :

$$U^{n+2}(x) = U^{n+1}(U(f)) = e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} U(f)(t) dt$$

Or, pour tout $t \in I$, $e^{-at} U(f)(t) = \int_t^{+\infty} \frac{(u-t)^n}{n!} e^{-au} f(u) du$. Mais on a déjà vu que $R : t \mapsto e^{-at} U(f)(t)$ est de classe C^1 avec $R' : t \mapsto -e^{-at} f(t)$.

On fait alors une **intégration par parties formelle**. Pour $x \in I$:

$$\int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} U(f)(t) dt = \left\{ \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-at} U(f)(t) \right\}_x^{+\infty} + \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-at} f(t) dt$$

Cette IPP est correcte puisque $U(f)$ est bornée (par définition) donc :

$$\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-at} U(f)(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi, pour $x \in I$, il reste :

$$\int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} U(f)(t) dt = \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-at} f(t) dt,$$

et, en multipliant par e^{ax} , on obtient : $U^{n+2}(x) = \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-at} f(t) dt.$

Par récurrence la propriété est donc vraie.

3. Cas des fonctions exponentielles

a. Soit $k \geq 0$. Pour tout $x \in I$ on a (en notant que $a + k \neq 0$) :

$$\begin{aligned} U(f_k) &= e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} e^{-kt} dt = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-(a+k)t} dt \\ &= e^{ax} \left[-\frac{e^{-(a+k)t}}{a+k} \right]_x^{+\infty} \\ &= e^{ax} \frac{e^{-(a+k)x}}{a+k} = \frac{e^{-kx}}{a+k} \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $k \geq 0$ on a : $U(f_k) : x \mapsto \frac{e^{-kx}}{a+k}$.

b. La question précédente affirme que pour tout $k \geq 0$ on a $U(f_k) = \frac{1}{a+k} f_k$. Mais une bête étude de fonction montre que $t \mapsto \frac{1}{a+t}$ est strictement décroissante de $[0, +\infty[$. Comme elle est continue, elle induit une bijection de $[0, +\infty[$ sur son image $]0, \frac{1}{a}]$. Ainsi, pour tout λ dans $]0, \frac{1}{a}]$, il existe (un unique, mais ça n'a pas d'importance) $k_\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $\frac{1}{a+k_\lambda} = \lambda$. On a alors :

$$U(f_{k_\lambda}) = \lambda f_{k_\lambda}.$$

Conclusion. Comme f_{k_λ} n'est pas la fonction nulle, on a : $\ker(U - \lambda \text{Id}_E) \neq \{0\}$.

c. • Si, pour un certain n entier naturel, $U^n(f_k) = \frac{1}{(a+k)^n} f_k$ alors :

$$U^{n+1}(f_k) = U^n(U(f_k)) = U^n\left(\frac{1}{(a+k)^n} f_k\right) = \frac{1}{(a+k)^n} U(f_k) = \frac{1}{(a+k)^{n+1}} f_k.$$

Comme cela est vrai pour $n = 0$ (et $n = 1$), par récurrence, on peut dire que :

$$U^n(f_k) = \frac{1}{(a+k)^n} f_k \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

• Soit x dans I . On a donc : $U^n(f_k)(x) = \frac{e^{-kx}}{(a+k)^n}$. Ainsi :

- si $a + k > 1$ i.e. $k > 1 - a$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U^n(f_k)(x) = 0$;
- si $a + k = 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U^n(f_k)(x) = e^{-kx}$;
- si $a + k < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U^n(f_k)(x) = +\infty$.

4. Cas des fonctions sinus et cosinus

a. Je vais utiliser les intégrales de fonctions complexes. Soit x dans I . Pour $X \geq x$ on a :

$$\int_x^X e^{-at} e^{it} dt = \left[\frac{e^{(i-a)t}}{i-a} \right]_x^X = \frac{1}{i-a} \left(e^{(i-a)X} - e^{(i-a)x} \right).$$

Mais $e^{(i-a)X} = e^{iX} e^{-aX} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 0$ puisque e^{iX} est de module 1. Ainsi $I(x) = \int_x^{+\infty} e^{-at} e^{it} dt$ converge de

valeur $\frac{-e^{(i-a)x}}{i-a} = \frac{e^{-ax}}{1+a^2} (a+i) e^{ix}$. On a alors :

$$U(\cos)(x) = e^{ax} \Re(I(x)) = \frac{1}{1+a^2} (a \cos x - \sin x) \text{ et } U(\sin)(x) = \frac{1}{1+a^2} (\cos x + a \sin x).$$

Conclusion. $U(\cos) = \frac{1}{1+a^2} (a \cos - \sin)$ et $U(\sin) = \frac{1}{1+a^2} (\cos + a \sin)$.

Autre méthode. On peut utiliser des IPP...

- b. • On vient de voir que $U(\cos) \in \text{vect}(\cos, \sin) = P$ et $U(\sin) \in \text{vect}(\cos, \sin) = P$.

Ainsi $P = \text{vect}(\cos, \sin)$ est stable par U .

Si maintenant α et β réel vérifient $\alpha \cos + \beta \sin = 0$, en évaluant cette égalité fonctionnelle en 2π puis en $\frac{\pi}{2}$, on obtient $\alpha = \beta = 0$. Il en résulte que $(\sin, \cos)$ est une **famille libre** qui **engendre** P : c'est une base de P .

- La matrice M de l'endomorphisme U_p induit par U sur P dans la base $(\sin, \cos)$ est :

$$M = \frac{1}{1+a^2} \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}.$$

- c. • On trouve : $M^2 = \frac{1}{(1+a^2)^2} \begin{pmatrix} a^2-1 & -2a \\ 2a & a^2-1 \end{pmatrix}$, $M^3 = \frac{1}{(1+a^2)^3} \begin{pmatrix} (a^2-1)a-2a & 1-3a^2 \\ 3a^2-1 & (a^2-1)a-2a \end{pmatrix}$,
 $M^4 = \frac{1}{(1+a^2)^4} \begin{pmatrix} (a^2-1)^2-4a^2 & -4(a^2-1)a \\ 4(a^2-1)a & (a^2-1)^2-4a^2 \end{pmatrix}.$

- Pour calculer M^n , remarquons que $\alpha = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \in [-1, 1]$ et $\beta = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \in [0, 1]$ vérifient $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

Il existe ainsi θ_a dans $[0, \pi[$ tel que $\cos \theta_a = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ et $\sin \theta_a = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$, de sorte que :

$$M = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \begin{pmatrix} \cos \theta_a & -\sin \theta_a \\ \sin \theta_a & \cos \theta_a \end{pmatrix}.$$

Mais $\begin{pmatrix} \cos \theta_a & -\sin \theta_a \\ \sin \theta_a & \cos \theta_a \end{pmatrix}$ est la matrice de la rotation vectorielle d'angle θ_a . Ainsi : $\begin{pmatrix} \cos \theta_a & -\sin \theta_a \\ \sin \theta_a & \cos \theta_a \end{pmatrix}^n$ est la matrice de la rotation vectorielle d'angle $n\theta_a$. On a donc :

$$M^n = \frac{1}{(\sqrt{1+a^2})^n} \begin{pmatrix} \cos \theta_a & -\sin \theta_a \\ \sin \theta_a & \cos \theta_a \end{pmatrix}^n = \frac{1}{(\sqrt{1+a^2})^n} \begin{pmatrix} \cos n\theta_a & -\sin n\theta_a \\ \sin n\theta_a & \cos n\theta_a \end{pmatrix}.$$

Comme toutes les suites $(\cos n\theta_a)$ et $(\sin n\theta_a)$ sont bornées, les coefficients de M^n convergent vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

5. Une autre famille de fonctions

- a. Soit $n \geq 1$ un entier. Soit x dans I . On a :

$$\psi_n(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} e^{-t} t^n dt = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-(a+1)t} t^n dt.$$

Une intégration par parties **formelle** donne :

$$\begin{aligned} \int_x^{+\infty} e^{-(a+1)t} t^n dt &= \left\{ -\frac{t^n e^{-(a+1)t}}{a+1} \right\}_x^{+\infty} + \frac{n}{a+1} \int_x^{+\infty} e^{-(a+1)t} t^{n-1} dt \\ &= \frac{x^n e^{-(a+1)x}}{a+1} + \frac{n}{a+1} \int_x^{+\infty} e^{-(a+1)t} t^{n-1} dt \end{aligned}$$

A posteriori cette IPP est justifiée, et en multipliant par e^{ax} on obtient :

$$\psi_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{a+1} + \frac{n}{a+1} \psi_{n-1}(x).$$

Conclusion. Pour n entier naturel non nul, on a $\psi_n = \frac{1}{a+1} \varphi_n + \frac{n}{a+1} \psi_{n-1}$.

- b. Soit $p \in \mathbb{N}$.

- Montrons tout d'abord que la famille $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est libre. Soient $\alpha_0, \dots, \alpha_p$ des réels tels que :

$$\alpha_0 \varphi_0 + \dots + \alpha_p \varphi_p = 0.$$

Pour tout $x \geq 1$ on a donc : $e^{-x}(\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_p x^p) = 0$. Comme $\exp > 0$, le polynôme $\alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_p X^p$ s'annule sur I : il admet une infinité de racines et on peut donc conclure que c'est le polynôme nul. Il en résulte que $\alpha_0 = \dots = \alpha_p = 0$ donc $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est une famille libre de F_p , espace vectoriel qu'elle engendre : $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est une base de F_p .

• Montrons maintenant que F_p est stable par U . Un calcul élémentaire montre que $U(\varphi_0) = \frac{1}{a+1} \varphi_0 \in E_p$.

Montrons alors par **récurrence finie** sur $n \in \{0, \dots, p\}$ que $\psi_n = U(\varphi_n) \in E_p$.

— On vient de voir que c'est vrai pour $n = 0$.

— Supposons que, pour un certain $n \in \{1, \dots, p\}$ on ait $\psi_{n-1} = U(\varphi_{n-1}) \in E_p$. La question précédente montre que

$$\psi_n = U(\varphi_n) = \frac{1}{a+1} \underbrace{\varphi_n}_{\in E_p} + \frac{n}{a+1} \underbrace{U(\varphi_{n-1})}_{\in E_p}.$$

Comme E_p est un espace vectoriel, $\psi_n \in E_p$.

Ainsi pour tout $n \in \{0, \dots, p\}$ on a $\psi_n = U(\varphi_n) \in E_p$. Comme $E_p = \text{vect}(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_p)$, E_p est stable par U .

c. • On a $\psi_0 = U(\varphi_0) = \frac{1}{a+1} \varphi_0$ puis :

$$U(\varphi_1) = \frac{1}{a+1} \varphi_1 + \frac{1}{a+1} \psi_0 = \frac{1}{a+1} \varphi_1 + \frac{1}{(a+1)^2} \varphi_0.$$

$$\text{Enfin, } U(\varphi_2) = \frac{1}{a+1} \varphi_2 + \frac{2}{a+1} \psi_1 = \frac{1}{a+1} \varphi_2 + \frac{2}{(a+1)^2} \varphi_1 + \frac{2}{(a+1)^3} \varphi_0.$$

$$\text{On a donc } T_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{a+1} & \frac{1}{(a+1)^2} & \frac{2}{(a+1)^3} \\ 0 & \frac{1}{a+1} & \frac{2}{(a+1)^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a+1} \end{pmatrix}.$$

• On a donc $T_2 = \frac{1}{a+1} (I + N)$ où N est la matrice nilpotente $N = \frac{1}{a+1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{2}{a+1} \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Puis on a :

$$N^2 = \frac{1}{(a+1)^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et pour tout } k \geq 3, N^k = 0.$$

La formule du binôme de Newton utilisée à bon droit (puisque I et N commutent) donne pour n entier :

$$T_2^n = \frac{1}{(a+1)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k = \frac{1}{(a+1)^n} \left(I + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 \right).$$

On obtient sans peine que $\boxed{\text{les coefficients de } T_2^n \text{ convergent vers 0 lorsque } n \text{ tend vers } +\infty}$, puisque, par croissances comparée, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{(a+1)^n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n-1)}{(a+1)^n} = 0$.

6. Une autre expression de $U(f)$

Soient f dans E et x dans I . On a :

$$U(f)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt.$$

On fait, dans l'intégrale $\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt$, le **changement de variable affine** $u = t - x$. On obtient :

$$\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-a(u+x)} f(u+x) du.$$

Ainsi $U(f)(x) = e^{ax} \int_0^{+\infty} e^{-a(u+x)} f(u+x) du = \int_0^{+\infty} e^{-au} f(u+x) du.$

Conclusion. Pour tout f dans E on a : $U(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-at} f(x+t) dt.$

7. Positivité de U

a. Soit f dans E . Si $x \in I$ on a :

$$|U(f)(x)| = \left| \int_0^{+\infty} e^{-at} f(x+t) dt \right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-at} |f(x+t)| dt = U(|f|)(x).$$

Conclusion. Pour $f \in E$ on a : $|U(f)| \leq U(|f|).$

b. On a $\psi = U(\varphi) = U(|\varphi|) \geq |U(\varphi)|$ donc ψ est à valeurs positives.

Autre méthode. Soit x dans I . Pour tout $u \in \mathbb{R}^+$ on a $e^{-au}\varphi(u+x) \geq 0$, puisque φ est positive. Par positivité de l'intégrale (les bornes sont dans le bon sens), on obtient :

$$\psi(x) = U(\varphi)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-au} \varphi(u+x) du \geq 0.$$

c. • Soit $x \in I$. Comme φ est décroissante, pour tout $t \geq 0$ on a $\varphi(x) \geq \varphi(x+t)$ donc ($\exp > 0$) :

$$e^{-at} \varphi(x) \geq e^{-at} \varphi(x+t).$$

Par croissance de l'intégrale (les bornes sont dans le bon sens), on obtient :

$$\underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-at} \varphi(x) dt}_{=\frac{1}{a} \varphi(x)} \geq \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-at} \varphi(x+t) dt}_{=\psi(x)}.$$

Ainsi on a : $a\psi \leq \varphi.$

• Comme ψ est solution du problème (E_φ) , on a : $\psi' = a\psi - \varphi \leq 0$. Ainsi ψ est décroissante.

8. Commutation de U avec la dérivation

a. Soient f dans E_1 et x dans I . On fait une IPP formelle :

$$U(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-at} f(x+t) dt = \left\{ -\frac{e^{-at}}{a} f(x+t) \right\}_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}}{a} f'(x+t) dt.$$

Cette IPP est a posteriori correcte puisque f et f' sont bornées et on a :

$$U(f)(x) = \frac{f(0)}{a} f(x+t) + \frac{1}{a} U(f').$$

Conclusion. Pour tout f élément de E_1 , on a $aU(f) = f + U(f').$

b. Soit f dans E_1 . D'après la question précédente, on a ;

$$aU(f) = f + U(f') \quad (\spadesuit)$$

Mais n'oublions pas la définition de $U(f)$: c'est l'unique solution bornée du problème (E_f) . Ainsi :

$$U(f)' = aU(f) - f \quad (\spadesuit\spadesuit)$$

Avec $(\spadesuit)$ et $(\spadesuit\spadesuit)$ on obtient $U(f)' = U(f').$

Conclusion. Pour tout élément f de E_1 on a : $D(U(f)) = U(D(f)).$

c. Soit f une fonction dans E_1 à valeur positive et décroissante. On a alors $f' = D(f) \leq 0$ donc $U(D(f)) \leq 0$ (puisque U est linéaire et positif). Comme $U(D(f)) = D(U(f))$, il vient $U(f)' \leq 0$ ce qui montre que $U(f)$ est décroissante.

II - Comportement asymptotique de $U(f)$ au voisinage de $+\infty$

1. Résultats préliminaires

a. Par définition de la propriété $\alpha(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(\beta(x))$, il existe une fonction $\eta : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\alpha(x) = \eta(x)\beta(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \eta(x) = 0.$$

Ainsi il existe $A > 0$ tel que pour tout $t \geq A$ on ait $|\varepsilon(t)| \leq \varepsilon$. Il vient, pour $x \geq A$:

$$\begin{aligned} \left| \int_x^{+\infty} \alpha(t) dt \right| &= \left| \int_x^{+\infty} \eta(t)\beta(t) dt \right| \leq \int_x^{+\infty} |\eta(t)\beta(t)| dt \\ &\leq \varepsilon \int_x^{+\infty} |\beta(t)| dt = \varepsilon \left| \int_x^{+\infty} \beta(t) dt \right| \text{ puisque } \beta \geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \geq A$ on a correctement (puisque $\beta > 0$) : $\left| \frac{\int_x^{+\infty} \alpha(t) dt}{\int_x^{+\infty} \beta(t) dt} \right| \leq \varepsilon$.

Cette dernière propriété signifie exactement que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_x^{+\infty} \alpha(t) dt}{\int_x^{+\infty} \beta(t) dt} = 0$, donc :

$$\boxed{\int_x^{+\infty} \alpha(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} \beta(t) dt\right)}.$$

b. Comme $\alpha(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \beta(x)$, il existe une fonction $\eta : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta(x) = 0$ et vérifiant, pour tout t dans I : $\alpha(t) = (1 + \eta(t))\beta(t)$.

Il vient alors, pour tout x dans I :

$$\int_x^{+\infty} \alpha(t) dt = \int_x^{+\infty} (1 + \eta(t))\beta(t) dt = \int_x^{+\infty} \beta(t) dt + \int_x^{+\infty} \eta(t)\beta(t) dt \quad (\clubsuit)$$

Mais $\eta(x)\beta(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(\beta(x))$ donc, selon la question précédente :

$$\int_x^{+\infty} \eta(t)\beta(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} \beta(t) dt\right).$$

Avec $(\clubsuit)$, on peut conclure que $\boxed{\int_x^{+\infty} \alpha(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} \beta(t) dt}$.

2. Cas des fonctions admettant une limite en $+\infty$

• On suppose que f dans E vérifie $\exists \lim_{+\infty} f = 0$. On a alors $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(1)$ donc :

$$e^{-at} f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(e^{-at}).$$

La question précédente affirme alors que : $\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} e^{-at} dt\right)$.

Mais $\int_x^{+\infty} e^{-at} dt = \frac{e^{-ax}}{a}$ donc, pour tout x dans I on a :

$$g(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt = o\left(\frac{1}{a}\right).$$

Conclusion. $\boxed{\text{Pour } f \text{ dans } E \text{ telle que } \exists \lim_{+\infty} f = 0, \text{ alors } \exists \lim_{+\infty} U(f) = 0.}$

- Considérons maintenant le cas général. On suppose que f dans E vérifie : $\exists \lim_{+\infty} f = b \in \mathbb{R}$. La fonction $f - b$ est dans E et vérifie $\exists \lim_{+\infty} f = 0$. Ainsi :

$$\exists \lim_{+\infty} U(f - b) = 0.$$

Mais U est linéaire donc $U(f - b) = U(f) - bU(1) = U(f) - \frac{1}{a}$. On peut donc conclure que :

$$\exists \lim_{+\infty} U(f) = \frac{b}{a}$$

Conclusion. Si $f \in E$ admet une limite finie b en $+\infty$ alors $\lim_{+\infty} U(f) = \frac{b}{a}$.

3. Cas des fonctions puissances

- a. • Soit x dans I . On a : $g_\omega(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} t^{-\omega} dt$.

Soit $A \geq x$. On fait une intégration par parties.

$$\int_x^A e^{-at} t^{-\omega} dt = \left\{ -\frac{e^{-at}}{a} t^{-\omega} \right\}_x^A - \int_x^A \frac{e^{-at}}{a} \omega t^{-\omega-1} dt$$

On fait alors tendre A vers $+\infty$ pour obtenir :

$$\int_x^{+\infty} e^{-at} t^{-\omega} dt = \frac{e^{-ax}}{a} x^{-\omega} - \frac{\omega}{a} \int_x^{+\infty} e^{-at} t^{-(\omega+1)} dt.$$

Il ne reste plus alors qu'à multiplier par e^{ax} .

Conclusion. Pour tout x dans I on a : $g_\omega(x) = \frac{f_\omega(x)}{a} - \frac{\omega}{a} g_{\omega+1}(x)$.

- On a $f_{\omega+1}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(f_\omega(x))$, puisque $\frac{f_{\omega+1}(t)}{f_\omega(t)} = \frac{1}{t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$. Ainsi :

$$e^{-ax} f_{\omega+1}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^{-ax} f_\omega(x)).$$

Toutes les hypothèses de la question **II-1a** sont vérifiées : on peut affirmer que

$$\int_x^{+\infty} e^{-at} f_{\omega+1}(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} e^{-at} f_\omega(t) dt\right).$$

Il en résulte que $g_{\omega+1}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(g_\omega(x))$. Comme pour x dans I on a $g_\omega(x) = \frac{f_\omega(x)}{a} - \frac{\omega}{a} g_{\omega+1}(x)$, on peut conclure que :

$$g_\omega(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f_\omega(x)}{a}.$$

- b. • Soit x dans I . La fonction $\exp$ est C^∞ . On écrit, pour $t \in I$, l'égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n pour $\exp$ entre 0 et $-at$: il existe c_t entre 0 et $-at$ tel que

$$e^{-at} = \sum_{k=0}^n \frac{(-at)^k}{k!} \exp^{(k)}(0) + \frac{(-at)^{n+1}}{(n+1)!} \exp^{(n+1)}(c_t).$$

Cela donne donc : $\frac{e^{-at}}{t} = \frac{1}{t} + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{a^k t^{k-1}}{k!} + \frac{(-a)^{n+1} t^n}{(n+1)!} e^{c_t}$.

Mais $\exp$ est croissante sur le segment $[-at, 0]$ donc $e^{c_t} \leq e^0 = 1$ et ainsi il vient :

$$\left| \frac{e^{-at}}{t} - \frac{1}{t} - \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{a^k t^{k-1}}{k!} \right| = \left| \frac{(-a)^{n+1} t^n}{(n+1)!} e^{c_t} \right| = \frac{a^{n+1} t^n}{(n+1)!} e^{c_t} \leq \frac{a^{n+1} t^n}{(n+1)!}.$$

Ainsi, pour tout t dans I on a :

$$-\frac{a^{n+1}t^n}{(n+1)!} \leq \frac{e^{-at}}{t} - \frac{1}{t} - \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{a^k t^{k-1}}{k!} \leq \frac{a^{n+1}t^n}{(n+1)!}.$$

Par croissance et linéarité de l'intégrale, il vient :

$$-\int_1^x \frac{a^{n+1}t^n}{(n+1)!} dt \leq \int_1^x \frac{e^{-at}}{t} dt - \underbrace{\int_1^x \frac{1}{t} dt}_{=\ln x} - \sum_{k=1}^n (-1)^k \underbrace{\int_1^x \frac{a^k t^{k-1}}{k!} dt}_{=\frac{a^k(x^k-1)}{kk!}} \leq \underbrace{\int_1^x \frac{a^{n+1}t^n}{(n+1)!} dt}_{=\frac{a^{n+1}(x^{n+1}-1)}{(n+1)(n+1)!}}.$$

$$\text{Ainsi : } \left| \int_1^x \frac{e^{-at}}{t} dt - \ln x - \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{a^k(x^k-1)}{kk!} \right| \leq \frac{a^{n+1}(x^{n+1}-1)}{(n+1)(n+1)!}.$$

Comme $\frac{a^{n+1}(x^{n+1}-1)}{(n+1)(n+1)!} \xrightarrow{+\infty} 0$, par sandwich, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \int_1^x \frac{e^{-at}}{t} dt - \ln x - \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{a^k(x^k-1)}{kk!} \right| = 0.$$

Ainsi la série $\sum_{k \geq 1} (-1)^k \frac{a^k(x^k-1)}{kk!}$ converge et on a :

$$\boxed{\int_1^x \frac{e^{-at}}{t} dt = \ln x + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{a^k}{kk!} (x^k - 1)}.$$

• Puis, si $x \in I$ on a : $g_1(x) = U(f_1)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t} dt = e^{ax} \left(\int_1^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t} dt - \int_1^x \frac{e^{-at}}{t} dt \right).$

Avec l'expression trouvée ci-dessus de $\int_1^x \frac{e^{-at}}{t} dt$, on obtient :

$$\boxed{g_1(x) = e^{ax} \left\{ -\ln x - \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{a^k}{kk!} (x^k - 1) + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t} dt \right\}}.$$

4. Cas des fonctions comparables aux fonctions puissances f_ω

a. Supposons que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(f_\omega(x))$. On a donc $e^{-ax} f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^{-ax} f_\omega(x))$. Comme toutes les hypothèses de la question **II-1a** sont satisfaites, on a :

$$\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o \left(\int_x^{+\infty} e^{-at} f_\omega(t) dt \right).$$

En multipliant par e^{ax} on obtient $U(f)(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(U(f_\omega)(x))$ i.e. $\boxed{g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(g_\omega(x))}$.

b. Supposons que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} f_\omega(x)$. On a donc $e^{-ax} f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-ax} f_\omega(x)$. Comme toutes les hypothèses de la question **II-1b** sont satisfaites, on a :

$$\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} e^{-at} f_\omega(t) dt.$$

En multipliant par e^{ax} , il vient $U(f)(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} U(f_\omega)(x)$ i.e. $\boxed{g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g_\omega(x)}$.

Mais on a vu (question **II-3a**) que $g_\omega(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f_\omega(x)}{a}$. Comme $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} f_\omega(x)$, par transitivité de la relation $\sim$, on peut assurer que g est équivalent à $\frac{f}{a}$ au voisinage de $+\infty$.

III - Convergence absolue de $\int_1^{+\infty} [U(f)](t) dt$.

1. Etudes d'exemples

- a. Soit $k > 0$. D'après la question **I-3a**, on a, pour tout $x \in I$: $g_k(x) = \frac{e^{-kx}}{a+k}$. Mais si $X \geq 1$, on a :

$$\int_1^X \frac{e^{-kx}}{a+k} dx = \left[-\frac{e^{-kx}}{k(a+k)} \right]_1^X = \frac{1}{k(a+k)} (e^{-k} - e^{-kX}) \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} \frac{e^{-k}}{k(a+k)}.$$

Conclusion. $\int_1^{+\infty} g_k(t) dt$ est convergente de valeur $\frac{e^{-k}}{k(a+k)}$.

- b. Tout d'abord g_ω est continue sur I (par définition de $U(f_\omega)$). Puis, d'après la question **II-3a**, on a :

$$g_\omega(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{a} f_\omega(x) = \frac{1}{a} \times \frac{1}{x^\omega} \boxed{\geq 0}.$$

Ainsi $\int_1^{+\infty} g_\omega(t) dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\omega} dt$ ont même nature. Or, d'après Riemann, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\omega} dt$ si et seulement si $\omega > 1$.

Conclusion. L'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} g_\omega(t) dt$ converge si et seulement si $\omega > 1$.

2. Cas des fonctions positives

- a. Par définition de $U(f)$, on a $g' - ag + f = 0$. Pour $x \in I$ il vient donc :

$$\int_1^x g' - a \int_1^x g + \int_1^x f = 0.$$

Comme g' est **continue**, on a $\int_1^x g' = g(x) - g(1)$. Comme g est continue, le théorème fondamental affirme que G est C^1 avec $G' = g$. On obtient donc : $G' - g(1) - aG + F = 0$.

Conclusion. On a : $G' - aG = -F + g(1)$.

- b. • Comme f est positive, pour tout x dans I on a $F(x) \leq \int_0^{+\infty} f(t) dt$. Il en résulte que F est bornée. Comme F est C^1 sur I (déjà dit), c'est un élément de E .

• La question précédente montre que G est solution du problème $(E_{F-g(1)})$. D'après la question **I-1a**, il existe donc une constante K' réelle telle que, pour tout x dans I , on ait :

$$G(x) = e^{ax} \left(K' - \int_1^x e^{-at} (F(t) - g(1)) dt \right) = Ke^{ax} - e^{ax} \int_1^x e^{-at} F(t) dt + e^{ax} g(1) \underbrace{\int_1^x e^{-at} dt}_{= \frac{e^{-a}}{a} - \frac{e^{-ax}}{a}}.$$

Mais on a $U(F)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} F(t) dt = e^{ax} \left(\int_1^{+\infty} e^{-at} F(t) dt - \int_1^x e^{-at} F(t) dt \right)$,

donc : $e^{ax} \int_1^x e^{-at} F(t) dt = -U(F)(x) + e^{ax} \int_1^{+\infty} e^{-at} F(t) dt$.

Ainsi il vient :

$$G(x) = e^{ax} \underbrace{\left(K' - \int_1^{+\infty} e^{-at} F(t) dt + \frac{e^{-a}}{a} \right)}_{=K \in \mathbb{R}} + U(F)(x) - \frac{g(1)}{a}.$$

Conclusion. Il existe $K \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in I$, $G(x) = Ke^{ax} + [U(F)](x) - \frac{g(1)}{a}$.

- c. Par définition de U , $g = U(f)$ est bornée sur I : il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \in I$ on ait $|g(x)| \leq M$. Il en résulte que pour tout $x \in I$ on a :

$$\left| \frac{G(x)}{x} \right| \leq \frac{1}{x} \int_1^x |g(t)| \, dt \leq \frac{1}{x} \int_1^x M \, dt = \frac{M(x-1)}{x} \leq M.$$

Conclusion. $x \mapsto \frac{G(x)}{x}$ est bornée sur I .

- d. Toujours par définition de U , $U(f)$ est une fonction bornée sur I et il en va de même de :

$$x \mapsto \frac{1}{x} \left([U(f)](x) - \frac{g(1)}{a} \right).$$

Ainsi, si par hasard on a $K \neq 0$, comme pour tout $x \in I$ on a

$$\frac{G(x)}{x} = K \frac{e^{ax}}{x} + \frac{1}{x} \left([U(f)](x) - \frac{g(1)}{a} \right),$$

on aurait $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{G(x)}{x} = -\infty$ ou $+\infty$ selon le signe de K . C'est une contradiction avec le fait que $x \mapsto \frac{G(x)}{x}$ est bornée sur I .

Conclusion. On a $K = 0$ et $G = U(f) - \frac{g(1)}{a}$.

- e. Comme f est positive, $U(f)$ est positive. Mais $G' = g = U(f)$ donc G est croissante sur I . Comme $U(f)$ est bornée, il existe M réel positive tel que $|U(f)| = U(f) \leq M$. Il vient alors :

$$G \leq M - \frac{g(1)}{a}.$$

En conclusion G est une fonction croissante et majorée : elle admet une limite réelle en $+\infty$ (Théorème de la limite monotone).

Conclusion. $\int_1^{+\infty} g(t) \, dt$ est convergente.

3. Cas général

D'après la question **I-7** on a $|g| = |U(f)| \leq U(|f|)$.

Or $\int_1^{+\infty} |f|$ converge. D'après la question précédente $\int_1^{+\infty} U(|f|)$ converge. Par domination (la fonction $|g|$ étant continue par composition), $\int_1^{+\infty} |g|$ converge.

Conclusion. $\int_1^{+\infty} g(t) \, dt$ est absolument convergente.