

Devoir n° 3, facultatif

Pour le mardi 5 novembre

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*La **présentation** de la copie doit être correcte, les résultats mis en valeur et les feuilles numérotées. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. La clarté, la précision et la concision de la rédaction entrent dans une part importante de l'évaluation.*

Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun.

Notations et objectif du problème

On désigne par I l'intervalle $[1, +\infty[$; on note E l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur I à valeurs réelles et $C^1(I, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 sur I à valeurs réelles.

On fixe enfin a un réel strictement positif.

Pour f un élément de E , on dit qu'une fonction y de $C^1(I, \mathbb{R})$ est une solution du problème (E_f) si :

$$(\forall x \in I) (y'(x) - ay(x) + f(x) = 0).$$

L'objectif de ce problème est de montrer qu'à tout élément f de E , on peut associer une unique solution g de (E_f) qui soit bornée sur I , puis d'étudier l'opérateur $U : f \mapsto g$.

Les trois parties du problème traitent, souvent à partir d'exemples, de propriétés de l'opérateur U .

I - Existence et propriétés élémentaires de l'opérateur U

1. a. On considère $f \in E$ et $y \in C^1(I, \mathbb{R})$. Ecrire la dérivée de $x \mapsto e^{-ax}y(x)$.

Montrer alors que y est solution du problème (E_f) si et seulement si il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que :

$$(\forall x \in I) \left(y(x) = e^{ax} \left(K - \int_1^x e^{-at} f(t) dt \right) \right).$$

- b. Montrer que, s'il existe une solution de (E_f) qui soit bornée sur I , celle-ci est unique.

- c. Vérifier que l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-at} f(t) dt$ est convergente.

- d. Démontrer que $g : x \mapsto e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt$ est l'unique solution du problème (E_f) qui soit bornée sur I .

Dans toute la suite du problème, si $f \in E$, on note $U(f)$ la fonction g obtenue à la question d ci-dessus.

2. Linéarité de U

- a. Expliciter $U(f)$ dans le cas où $f = 1$.
 b. Montrer que U est un endomorphisme de E .
 c. U est-il injectif?
 d. On définit les puissances successives de U par $U^0 = \text{Id}_E$ et pour tout entier naturel n , par $U^{n+1} = U^n \circ U$.

Montrer que, pour tout entier naturel n , $U^{n+1}(f)$ est la fonction : $x \mapsto e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t) dt$.

3. Cas des fonctions exponentielles

- Pour k un nombre réel positif et f_k la fonction $x \mapsto e^{-kx}$, expliciter $U(f_k)$.
- En déduire que, pour tout réel $\lambda \in]0, \frac{1}{a}]$ on a : $\ker(U - \lambda \text{Id}_E) \neq \{0\}$.
- Pour tout entier naturel n , expliciter $U^n(f_k)$. Pour x élément de I , préciser $\lim_{n \rightarrow +\infty} [U^n(f_k)](x)$.

4. Cas des fonctions sinus et cosinus

- Expliciter $U(\sin)$ et $U(\cos)$.
- Montrer que le sous-espace P de E engendré par les fonctions $\sin$ et $\cos$ est stable par U et que $(\sin, \cos)$ en est une base. Dans cette base, écrire la matrice M de l'endomorphisme U_P induit par U sur P .
- Calculer M^2 , M^3 , M^4 . Expliciter M^n pour tout entier naturel n , puis préciser la limite des coefficients de M^n lorsque n tend vers l'infini.

5. Une autre famille de fonctions

Pour tout entier naturel n , on considère la fonction de E $\varphi_n : x \mapsto e^{-x}x^n$ et on note $\psi_n = U(\varphi_n)$.

- Pour n entier naturel non nul, établir une relation entre ψ_n , φ_n et ψ_{n-1} .
- Pour p entier naturel, montrer que le sous espace F_p de E engendré par $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est stable par U et admet pour base $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_p)$.
- On prend ici $p = 2$. Ecrire dans la base $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ la matrice T_2 de l'endomorphisme U_2 induit par U sur F_2 . Calculer T_2^n pour tout entier naturel n , puis préciser la limite des coefficients de T_2^n lorsque n tend vers l'infini.

6. Une autre expression de $U(f)$

Pour $f \in E$, démontrer que : $(\forall x \in I) \left(U(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-at} f(x+t) dt \right)$.

7. Positivité de U

- Pour $f \in E$, montrer que : $|U(f)| \leq U(|f|)$.

On considère maintenant φ un élément de E à valeurs positives et $\psi = U(\varphi)$.

- Montrer que ψ est à valeurs positives.
- On suppose que φ est décroissante. Montrer que $a\psi \leq \varphi$ puis que ψ est décroissante.

8. Commutation de U avec la dérivation

On note $E_1 = \{f \in E \cap C^1(I, \mathbb{R}) \mid f' \text{ bornée sur } I\}$ et D l'opérateur de dérivation qui, à tout élément de E_1 , associe sa dérivée.

- Pour f un élément de E_1 , montrer, en utilisant la question 6, que : $aU(f) = f + U(f')$.
- En déduire que, pour tout élément f de E_1 , $D(U(f)) = U(D(f))$.
- Pour f une fonction de E_1 à valeurs positives et décroissante, retrouver le résultat de la question 7.c : $U(f)$ est décroissante.

II - Comportement asymptotique de $U(f)$ au voisinage de $+\infty$

On traite ici quelques cas fondamentaux, en partant d'exemples de fonctions f pour lesquelles on peut connaître le comportement de $g = U(f)$ au voisinage de $+\infty$.

1. Résultats préliminaires

On considère ici α et β deux fonctions à valeurs réelles, continues sur I . On suppose que $\beta > 0$ et que $\int_1^{+\infty} \beta(t) dt$ converge.

- a. On suppose ici que $\alpha(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(\beta(x))$ et on se propose de montrer que :

$$\int_x^{+\infty} \alpha(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o \left(\int_x^{+\infty} \beta(t) dt \right).$$

Soit $\varepsilon > 0$, montrer que $(\exists A > 0)(\forall x \geq A) \left(\left| \int_x^{+\infty} \alpha(t) dt \right| \leq \varepsilon \left| \int_x^{+\infty} \beta(t) dt \right| \right)$. Conclure.

- b. On suppose maintenant que $\alpha(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \beta(x)$. Montrer que $\int_x^{+\infty} \alpha(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} \beta(t) dt$.

2. Cas des fonctions admettant une limite en $+\infty$

Si f est un élément de E admettant une limite finie b en $+\infty$ (b est un nombre réel), montrer que $g = U(f)$ admet une limite en $+\infty$ que l'on précisera (*on pourra commencer par traiter le cas où $b = 0$ en écrivant, dans ce cas, $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(1)$ et en utilisant la question II-1*).

3. Cas des fonctions puissances

Dans cette question et la suivante, ω est un réel strictement positif, on note f_ω la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\omega}$ et $g_\omega = U(f_\omega)$.

- a. Montrer que pour tout x dans I on a : $g_\omega(x) = \frac{f_\omega(x)}{a} - \frac{\omega}{a} g_{\omega+1}(x)$.

En déduire que $g_\omega(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f_\omega(x)}{a}$.

- b. Montrer que pour tout x de I : $\int_1^x \frac{e^{-at}}{t} dt = \ln x + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{a^k}{k k!} (x^k - 1)$ (*On pourra utiliser une formule de Taylor-Lagrange pour la fonction $t \mapsto e^{-at}$*). En déduire que pour tout x dans I :

$$g_1(x) = e^{ax} \left\{ -\ln x - \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{a^k}{k k!} (x^k - 1) + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t} dt \right\}.$$

4. Cas des fonctions comparables aux fonctions puissances f_ω

On note toujours f un élément de E et $g = U(f)$.

- a. Prouver que si f est négligeable devant f_ω au voisinage de $+\infty$, alors g est négligeable devant g_ω au voisinage de $+\infty$.
- b. Prouver que si f est équivalent à f_ω au voisinage de $+\infty$, alors g est équivalent à $\frac{f}{a}$ au voisinage de $+\infty$.

III - Convergence absolue de $\int_1^{+\infty} [U(f)](t) dt$.

On s'intéresse dans cette partie à la convergence de $\int_1^{+\infty} |[U(f)](t)| dt$ dans le cas où $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ est absolument convergente. On note toujours $g = U(f)$.

1. Etudes d'exemples

- a. Pour k un réel strictement positif et $f_k : x \mapsto e^{-kx}$, on note $g_k = U(f_k)$. Vérifier que $\int_1^{+\infty} g_k(t) dt$ est convergente.
- b. Pour ω un réel strictement positif, on note encore $f_\omega : t \mapsto \frac{1}{t^\omega}$ et $g_\omega = U(f_\omega)$. Pour quelles valeurs de ω , l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} g_\omega(t) dt$ est-elle convergente ?

2. Cas des fonctions positives

Dans cette question, f est un élément de E , à valeurs positives tel que $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ est convergente.

On note $F : x \in I \mapsto \int_1^x f(t) dt$, $g = U(f)$ et $G : x \in I \mapsto \int_1^x g(t) dt$

- Vérifier que $G' - aG = -F + g(1)$.
- Justifier que F est dans E et montrer qu'il existe une constante réelle K telle que, pour tout $x \in I$, $G(x) = Ke^{ax} + [U(F)](x) - \frac{g(1)}{a}$.
- Vérifier que $x \mapsto \frac{G(x)}{x}$ est bornée sur I .
- En déduire que $K = 0$ et que $G = U(F) - \frac{g(1)}{a}$.
- Montrer alors que $\int_1^{+\infty} g(t) dt$ est convergente.

3. Cas général

Dans cette question, f est un élément de E tel que $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ est absolument convergente.

Montrer que $\int_1^{+\infty} g(t) dt$ est absolument convergente.