Devoir n° 2

Pour le jeudi 3 octobre 2024

*La **présentation** de la copie doit être correcte, les résultats mis en valeur et les feuilles numérotées.*
Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. La clarté, la précision et la concision de la rédaction entrent dans une part importante de l'évaluation.

Exercice 1 - Dérivation discrète

On note F l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, E le sous-espace vectoriel de F des fonctions polynomiales et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, E_n le sous-espace vectoriel de E des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n.
On considère l'endomorphisme $D : f \mapsto D(f)$ de F, où la fonction $D(f)$ est définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad [D(f)](x) = f(x+1) - f(x)\,.$$

1. a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, E_n est stable par D.
   On note alors pour la suite Δ_n l'endomorphisme de E_n induit par D.
   b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer le noyau et l'image de Δ_n.
   c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les valeurs propres de Δ_n, c'est à dire les valeurs de λ réel pour lesquels $\ker(\Delta_n - \lambda \mathrm{Id}_{E_n}) \neq \{0\}$.
   (5/2) L'endomorphisme Δ_n est-il diagonalisable ?
   d) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, justifier que pour tout $Q \in E_{n-1}$, il existe un unique $P \in E_n$ tel que $\Delta_n(P) = Q$ et $P(0) = 0$.
   e) Expliciter P lorsque $Q(x) = x^2$.
   Utiliser P pour retrouver la valeur de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. a) Soit $\phi : \,]0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction, et $g \in F$. Montrer qu'il existe une unique fonction $f \in F$ telle que $D(f) = g$ et $\forall\, x \in \,]0,1]\,,\ f(x) = \phi(x)$.
   b) L'endomorphisme D est-il surjectif ?
   c) Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe une fonction $f \in F$, différente de la fonction nulle, telle que $D(f) = \lambda f$.

Exercice 2 - Formes linéaires sur un espace vectoriel de dimension finie

Dans tout l'exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2 et E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie n.

Notations et définition

— On note 0_E le vecteur nul de E.
— Lorsque F est un espace vectoriel on note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F.
— Une ***forme linéaire*** sur E est une application linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}$.
— On note, dans ce problème, $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des formes linéaires sur E.

Préliminaire

1. Justifier que les espaces vectoriels E et E^* ont la même dimension.

2. Soit φ un élément de E^*.
   a) Démontrer que φ est soit nulle, soit surjective.
   b) On suppose que φ n'est pas l'application nulle. Démontrer que $\ker \varphi$ est un hyperplan de E.

Partie I - Des exemples

3. **Premier exemple**
   Dans cette question, p est un entier naturel non nul et E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}_p[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p.

   On considère l'application $g : E \to \mathbb{R}$ définie par : $g(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$.

   a) Démontrer que g est un élément de E^*.
   b) Quelle est la dimension du noyau de g ?
   c) Pour $k \in \{1, \ldots, p\}$ on considère le polynôme $Q_k : X^k - \dfrac{1}{k+1}$.
   Démontrer que la famille $(Q_1, \ldots, Q_p)$ est une base du noyau de g.

4. **Second exemple**
   Dans cette question, p est un entier naturel non nul et E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}_p[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p.
   On considère l'application $f : E \to \mathbb{R}$ définie par : $f(P) = P(0)$.

   a) Démontrer que f est un élément de E^*.
   b) Déterminer le noyau de f.

5. Dans cette question, on revient au cadre général.
   Soient f et g deux éléments de E^*, non nuls, tels que $\ker f \subset \ker g$.

   a) Démontrer que $\ker f = \ker g$.
   b) Justifier de l'existence d'un élément x_0 de E qui n'appartient pas au noyau de f.
   c) Démontrer que $E = \ker f \oplus \mathrm{vect}(x_0)$, où $\mathrm{vect}(x_0)$ désigne le sous-espace vectoriel de E engendré par le vecteur x_0.
   d) On pose $h = g(x_0)f - f(x_0)g$. Démontrer que h est nulle.
   e) Que peut-on en conclure pour les formes linéaires f et g ?

Partie II - Formes linéaires et structure euclidienne

Dans cette partie, l'espace vectoriel E est muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$.
Pour $a \in E$ on note f_a l'application qui à un élément x dans E associe le réel $f_a(x) = \langle a, x\rangle$.

6. Soit $a \in E$.

   a) Démontrer que f_a est un élément de E^*.
   b) Déterminer le noyau de f_a.
   c) Démontrer que si f_a est l'application nulle alors $a = 0_E$.

7. **Théorème de représentation des formes linéaires**
   On considère maintenant l'application $\Phi : E \to E^*$ définie, pour $a \in E$, par : $\Phi(a) = f_a$.

   a) Démontrer que Φ est linéaire.
   b) Démontrer que Φ est un isomorphisme de E sur E^*.
   c) Justifier que pour tout $\varphi \in E^*$ il existe un unique $a \in E$ tel que :

   $$\forall x \in E,\ \varphi(x) = \langle a, x\rangle\,.$$

8. **Application aux formes linéaires sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$**
   Dans cette question, p est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on considère $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices carrées de taille p.

   a) Démontrer que $\langle\ ,\ \rangle : (A, B) \mapsto \mathrm{tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
   b) Démontrer que si $\varphi : \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire alors il existe une matrice A dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que pour toute matrice M dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ on ait :

   $$\varphi(M) = \mathrm{tr}(AM).$$