

Devoir n° 0, une correction

Partie I - Exercices d'analyse

Exercice 1

1. Soit $x \in]0, 1[$. Pour tout $n \geq 15$ entier on a : $\sum_{k=15}^n x^k = \frac{x^{15} - x^{n+1}}{1 - x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{15} - x^{n+1}}{1 - x}$.

Ainsi la série $\sum_{n \geq 15} x^n$ converge de somme : $\sum_{n=15}^{+\infty} x^n = \frac{x^{15}}{1 - x}$.

2. Soit x réel. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $S_n = \sum_{k=0}^n e^{ikx}$.

- Si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $e^{ikx} = 1$ et ainsi : $S_n = n + 1$.
- Si $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ alors $e^{ix} \neq 1$ et la formule des progressions géométriques donne :

$$S_n = \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}.$$

On peut simplifier cette dernière expression de la manière suivante :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{e^{i(n+1)\frac{x}{2}} (e^{-i(n+1)\frac{x}{2}} - e^{i(n+1)\frac{x}{2}})}{e^{i\frac{x}{2}} (e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}})} = e^{in\frac{x}{2}} \times \frac{-2i \sin \frac{(n+1)x}{2}}{-2i \sin \frac{x}{2}} \\ &= \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} e^{in\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

Ainsi il vient :

- Si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, $\sum_{k=0}^n \cos(kx) = \Re e(S_n) = n + 1$ et $\sum_{k=0}^n \sin(kx) = \Im m(S_n) = 0$.
- Si $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^n \cos(kx) = \Re e(S_n) = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cos \frac{nx}{2} \\ \sum_{k=0}^n \sin(kx) = \Im m(S_n) = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{nx}{2} \end{cases}$$

Exercice 2

Soit $k > 0$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction :

$$f_n = \left(\begin{array}{cc}]0, +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^{k+1} + x^k - n \end{array} \right)$$

Cette fonction est polynomiale donc de classe C^∞ (et en particulier **continue**), et on a :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = -n \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty \end{cases}$$

Ainsi, d'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $f_n(x) = 0$ admet au moins une solution sur $]0, +\infty[$. Comme f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ (car $f'_n > 0$), cette solution est unique.

Remarque. Comme f_n est strictement croissante, elle induit une bijection de $]0, +\infty[$ sur $f([0, +\infty[) =] -n, +\infty[$, cette dernière égalité résultant de la continuité de f : cela permet aussi de conclure.

Notons aussi que la bijection réciproque f_n^{-1} est de même monotonie, c'est à dire strictement croissante.

2. • Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $f_n(x_n) = 0$ ainsi : $f_{n+1}(x_n) = f_n(x_n) - 1 = -1$.
Il en résulte que $f_{n+1}(x_n) < 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$. Par stricte croissance de f_{n+1}^{-1} , il vient :

$$x_n < x_{n+1}.$$

Ceci étant valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la suite (x_n) est strictement croissante.

- Supposons un instant que la suite (x_n) converge vers un réel ℓ (qui est positif). On a alors :

$$0 = f_n(x_n) \sim \ell^{k+1} + \ell^k - n \xrightarrow{+\infty} -\infty$$

ce qui est profondément stupide. La suite (x_n) ne converge pas. Cette suite n'est donc pas majorée, et comme elle est croissante on peut dire que : $x_n \xrightarrow{+\infty} +\infty$.

3. Comme $x_n \xrightarrow{+\infty} +\infty$, on a $x_n^{k+1} \sim x_n^{k=1} - x_n^k$. Ainsi il vient : $\frac{x_n^{k+1}}{n} \sim \frac{x_n^{k=1} - x_n^k}{n} = 1$.

Il en résulte que $\frac{x_n^{k+1}}{n} \xrightarrow{+\infty} 1$, d'où $x_n^{k+1} \sim n$ et $x_n \sim \sqrt[k+1]{n}$.

Exercice 3

Soit g la fonction définie sur $[0, 1]$ par $g(x) = f(x) - x$. Raisonnons par l'absurde et supposons que g ne s'annule pas sur $]0, 1[$. Comme elle est continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, on a $g > 0$ ou $g < 0$ sur $]0, 1[$. Dans le premier cas, il vient donc :

$$0 < \int_0^1 g = \int_0^1 f - \frac{1}{2},$$

ce qui est absurde. L'autre cas se traite de même.

Exercice 4

Comme P est de degré impair, en confondant P avec la fonction polynôme associée, quitte à changer P en $-P$, on a :

$$\begin{cases} \lim_{-\infty} P = -\infty \\ \lim_{+\infty} P = +\infty \end{cases}$$

Ainsi la fonction P qui est continue sur $\mathbb{R}$ change de signe strict sur $\mathbb{R}$: le théorème des valeurs intermédiaire assure alors l'existence de $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P(\alpha) = 0$.

Exercice 5

L'équation homogène associée est $y' - y = 0$ et sa solution générale est $t \mapsto Ce^t$ où C décrit $\mathbb{R}$.

On cherche alors une solution particulière de la forme $f : t \mapsto \lambda(t)e^t$ où λ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout t réel on a $f'(t) = (\lambda'(t) + \lambda(t))e^t$. On a alors les équivalences :

$$\begin{aligned} & y \text{ solution de } y' - y = h(t) \text{ sur } \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & (\lambda'(t) + \lambda(t))e^t - \lambda(t)e^t = h(t) \text{ pour } t \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & \lambda'(t) = h(t)e^{-t} \text{ pour } t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

On prend $\lambda : x \mapsto \int_0^x h(t)e^{-t} dt$ de sorte que la solution générale de $y' - y = h(t)$ est :

$$x \mapsto \left(C + \int_0^x h(t)e^{-t} dt \right) e^x.$$

Exercice 6

1. • Sur $]0, 1[$, l'équation différentielle homogène associée à (E) est $(E_0) \quad y' + \frac{y}{x} = 0$. La solution générale de cette dernière équation est :

$$x \mapsto \lambda e^{-B(x)}$$

où λ est une constante réelle et B une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, 1[$. On prend bien sûr $B(x) = \ln x$ et la solution générale de (E_0) sur $]0, 1[$ est alors :

$$x \mapsto \frac{\lambda}{x} \text{ où } \lambda \text{ est un réel.}$$

On cherche alors une solution particulière U de (E) sur $]0, 1[$ par la méthode de la variation de la constante. Soit $\lambda :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. On pose $U(x) = \frac{\lambda(x)}{x}$ pour $x \in]0, 1[$. On a alors :

$$U'(x) = \frac{\lambda'(x)x - \lambda(x)}{x^2}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} & U \text{ solution de } (E) \text{ sur }]0, 1[\\ \Leftrightarrow & \frac{\lambda'(x)x - \lambda(x)}{x} + \frac{\lambda(x)}{x} = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} \text{ pour } x \in]0, 1[\\ \Leftrightarrow & \lambda'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} \text{ pour } x \in]0, 1[\\ \Leftrightarrow & \text{Il existe } C \text{ constante telle que } \lambda(x) = \arcsin x^2 + C \text{ pour } x \in]0, 1[\end{aligned}$$

On prend alors $U(x) = \frac{\arcsin x^2}{x}$ pour $x \in]0, 1[$.

Conclusion. Les solutions de (E) sur $]0, 1[$ sont donc exactement les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \frac{\arcsin x^2 + \lambda}{x} \text{ où } \lambda \text{ décrit } \mathbb{R}$$

• Sur $] -1, 0[$, une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $x \mapsto \ln |x| = \ln(-x)$. La solution générale de (E_0) $y' + \frac{y}{x} = 0$ sur $] -1, 0[$ est donc :

$$x \mapsto \frac{\mu}{x} \text{ où } \mu \text{ est un réel.}$$

La fonction U définie par $U(x) = \frac{\arcsin x^2}{x}$ pour $x \in] -1, 0[$ est encore une solution particulière de (E) sur $] -1, 0[$.

Conclusion. Les solutions de (E) sur $] -1, 0[$ sont donc exactement les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \frac{\arcsin x^2 + \mu}{x} \text{ où } \mu \text{ décrit } \mathbb{R}$$

2. • Si f est solution sur $] -1, 1[$ de (E) cette fonction est aussi solution de (E) sur $] -1, 0[$ et $]0, 1[$. On dispose donc de deux constantes λ et μ telles que :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\arcsin x^2 + \lambda}{x} & \text{si } -1 < x < 0 \\ f(x) = \frac{\arcsin x^2 + \mu}{x} & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Puis f est continue en 0 et $\arcsin x^2 \underset{0}{\sim} x^2$: cela force $\lambda = \mu = 0$. On a donc :

$$f(x) = \frac{\arcsin x^2}{x} \text{ pour } x \in] -1, 0[\cup]0, 1[\text{ et } f(0) = 0.$$

• Réciproquement soit f la fonction définie sur $] -1, 1[$ par :

$$f(x) = \frac{\arcsin x^2}{x} \text{ pour } x \in] -1, 0[\cup]0, 1[\text{ et } f(0) = 0.$$

Cette fonction f est continue en 0 et on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$$

donc f est dérivable en 0 de nombre dérivé $f'(0) = 1$. D'après la première question f est solution de (E) sur chacun des intervalles $] -1, 0[$ et $]0, 1[$ et on a bien $xf'(x) + f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$ pour $x \neq 0$. On en déduit donc que f est la seule solution de (E) sur $] -1, 1[$. $\square$

Exercice 7

Soient $a_1, \dots, a_n$ les racines de P rangées dans l'ordre strictement croissant. Fixons i dans $\{1, \dots, n-1\}$. La fonction polynomiale P est continue sur $[a_i, a_{i+1}]$ et dérivable sur $]a_i, a_{i+1}[$. De plus $P(a_i) = P(a_{i+1})$: le théorème de Rolle s'applique. Il existe $b_i \in]a_i, a_{i+1}[$ tel que $P'(b_i) = 0$. Comme :

$$b_1 < a_2 < b_2 < a_3 < \dots < a_{n-1} < b_{n-1} < a_n,$$

le polynôme P' admet $n-1$ racines distinctes.

Exercice 8

On considère la fonction $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = e^x(f(x) - f'(x))$. Cette fonction est dérivable sur $[a, b]$ avec $g(a) = g(b)$. Selon le théorème de Rolle il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. Mais on a, pour tout x dans $[a, b]$, $g'(x) = e^x(f(x) - f''(x)) \dots$

Exercice 9

On considère la fonction $g :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = e^{\alpha x} f(x)$. Cette fonction est dérivable sur $]0, +\infty[$ et admet n zéros que l'on classe par ordre croissant : $a_1 < \dots < a_n$. Fixons i dans $\{1, \dots, n-1\}$. Comme $g(a_i) = g(a_{i+1}) = 0$, selon le théorème de Rolle, il existe c_i entre a_i et a_{i+1} tel que $g'(c_i) = 0$. Or, si $x > 0$, $g'(x) = e^{\alpha x}(\alpha f(x) + f'(x))$. On peut conclure...

Exercice 10

1. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \exp\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (e^{1/n^2})^k = \frac{1}{n} \times \frac{e^{1/n^2} - e^{1/n^2} e^{1/n^2}}{1 - e^{1/n^2}}$$

et il vient ainsi :

$$\begin{aligned} \ln v_n &= n \ln u_n = n \left(-\ln n + \ln \left(e^{1/n} e^{1/n^2} - e^{1/n^2} \right) - \ln \left(e^{1/n^2} - 1 \right) \right) \\ &= n \left(-\ln(n) + \frac{1}{n^2} + \ln \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right) - \ln \left(e^{\frac{1}{n^2}} - 1 \right) \right). \end{aligned}$$

b) On écrit le développement limité à l'ordre 2 de $\exp$ en 0 :

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Ainsi, pour x non nul : $\frac{e^x - 1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + o(x)$.

On passe au logarithme : $\ln(e^x - 1) - \ln(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \ln \left(1 + \frac{x}{2} + o(x) \right)$.

On utilise alors le développement limité à l'ordre 1 : $\ln u \underset{u \rightarrow 0}{=} u + o(u)$.

Comme $u = \frac{x}{2} + o(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, il vient :

$$\ln(e^x - 1) - \ln(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x}{2} + \underbrace{o(x) + o\left(\frac{x}{2} + o(x)\right)}_{=o(x)}.$$

c) Comme $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, la question précédente donne :

$$\begin{cases} \ln \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right) = \ln \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = -\ln n + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ \ln \left(e^{\frac{1}{n^2}} - 1 \right) = \ln \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = -2\ln n + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \ln v_n &= n \left(-\ln(n) + \frac{1}{n^2} + \ln \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right) - \ln \left(e^{\frac{1}{n^2}} - 1 \right) \right) \\ &= n \left(\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) = \frac{1}{2} + o(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On a donc $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{1/2}$ par continuité de l'exponentielle.

2. a) On écrit l'égalité des accroissements finies entre 0 et t pour la fonction $\exp$: il existe c_t entre 0 et t tel que :

$$e^t - e^0 = (t - 0)e^{c_t}.$$

Ainsi : $|e^t - 1| = |t|e^{c_t} \leq |t|e^{|t|}$.

- b) L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 dit que $|e^t - 1 - t| \leq \frac{t^2}{2}M$, où M est la maximum de $\exp'' = \exp$ sur le segment d'extrémités 0 et t .

Comme $M \leq e^{|t|}$ on obtient le résultat souhaité : $|e^t - 1 - t| \leq \frac{t^2}{2}e^{|t|}$.

3. a) Démontrer qu'il existe un réel M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \{1, \dots, n\}$ on ait :

$$\exp\left(\frac{1}{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \right) \leq \frac{M}{n}.$$

- b) • Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{1, \dots, n\}$. En utilisant l'inégalité de la question 2a, on a :

$$\left| \exp\left(\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) - 1 \right| \leq \frac{1}{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \exp\left|\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right|$$

Avec l'inégalité de la question 3a, il vient :

$$\left| \exp\left(\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) - 1 \right| \leq \frac{M_0 M}{n^2},$$

où M_0 borne la fonction continue f sur le segment $[0, 1]$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\begin{aligned} |u_n - 1| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \exp\left(\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) - 1 \right| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \exp\left(\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1 \right| \\ &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\exp\left(\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) - 1 \right) \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left| \exp\left(\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) - 1 \right| \\ &\leq \frac{M_0 M}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Ainsi $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$.

- On a $\ln v_n = n \ln u_n = n \ln(1 + u_n - 1) \sim n(u_n - 1)$.

- c) Établir qu'il existe un réel K tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \{1, \dots, n\}$ on ait :

$$\left| n(u_n - 1) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{K}{n}.$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{1, \dots, n\}$. En utilisant l'inégalité de la question 2b, on a : On a :

$$\begin{aligned} n(u_n - 1) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) &= \sum_{k=1}^n \exp\left(\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) - n - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\exp\left(\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) - 1 - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \end{aligned}$$

Ainsi, par inégalité triangulaire :

$$\left| n(u_n - 1) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \sum_{k=1}^n \left| \exp\left(\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) - 1 - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right|.$$

En utilisant l'inégalité de la question 2b, on obtient pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$:

$$\left| \exp\left(\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) - 1 - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{1}{2n^2} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right|^2 \exp\left|\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right|.$$

Avec la question 3a, il vient alors :

$$\left| \exp\left(\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right) - 1 - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{1}{2n^2}M_1^2\frac{M}{n},$$

où M_1 borne f^2 sur $[0, 1]$. Ainsi :

$$\left| n(u_n - 1) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2n^2} M_1^2 \frac{M}{n} = \frac{1}{2n^2} M_1^2 M.$$

d) Par somme de Riemann on a : $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{+\infty} \int_0^1 f(t) dt$.

Par inégalité triangulaire :

$$\left| n(u_n - 1) - \int_0^1 f(t) dt \right| \leq \left| n(u_n - 1) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| + \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(t) dt \right| \xrightarrow{+\infty} 0.$$

Ainsi $n(u_n - 1) \xrightarrow{+\infty} \int_0^1 f(t) dt$.

Or $\ln v_n \sim n(u_n - 1)$ donc, par continuité de l'exponentielle, $v_n \xrightarrow{+\infty} \exp\left(\int_0^1 f(t) dt\right)$.

4. On applique ce qui précède avec la fonction $f = \ln g$, qui est correctement définie...

Partie II - Exercices de mathématiques générales et d'algèbre linéaire

Exercice 11

- Montrons que f est surjective. Soit $y \in Y$. On a alors $y = f \circ g(y) = f[g(y)]$: y est l'image par f de $g(y)$. L'application f est bien surjective.
- Montrons que g est injective. Soient y_1 et y_2 dans Y tels que $g(y_1) = g(y_2)$. On a alors $f[g(y_1)] = f[g(y_2)]$, donc $y_1 = y_2$ puisque $f \circ g = \text{Id}_Y$. Ainsi g est injective.
- Montrons que f est bijective. Comme $f \circ g = \text{Id}_Y$, d'après la question précédente, f est surjective. Comme $g \circ f = \text{Id}_X$, toujours d'après la question précédente, f est injective. Ainsi f est bijective.
- On a $f \circ g = \text{Id}_Y$ donc $\underbrace{f^{-1} \circ f}_{=\text{Id}_X} \circ g = f^{-1}$. Ainsi $f^{-1} = g$.

Exercice 12

- Soient $(P, Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \underline{f(\lambda P + Q)} &= (\lambda P + Q)(X + 1) - (\lambda P + Q)(X) = \lambda(P(X + 1) - P(X)) + Q(X + 1) - Q(X) \\ &= \underline{\lambda f(P) + f(Q)} \end{aligned}$$

Il en résulte que f est une application linéaire. Comme $f(P) \in E$ (son degré est inférieur à 1), f est un endomorphisme de E .

- La base canonique de E est $\beta = (1, X, \dots, X^n)$. On a $f(1) = 0$ et pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ il vient :

$$f(X^k) = (X + 1)^k - X^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} X^i - X^k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i.$$

Ainsi la matrice de u dans β est :

$$A = [f]_{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 & 0 & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} \\ \vdots & \ddots & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

2. Cette matrice est de rang n donc le noyau de f est de dimension 1. Comme $f(1) = 0$, $\ker f = \text{vect}(1) = \mathbb{R}_0[X]$.
Puis $\text{Im } f \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\dim \text{Im } f = n$ on peut conclure que $\text{Im } f = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Exercice 13 (Valeurs propres d'une matrice)

1. **Une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.** Ainsi, pour $\lambda \in \mathbb{K}$, la matrice $M - \lambda I$ est singulière si et seulement si son déterminant est nul, ce qui justifie que : « les valeurs propres de M sont exactement les valeurs de λ qui annulent ce déterminant ».

2. a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On a : $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 4 - \lambda & -3 & 9 \\ 6 & -5 - \lambda & 9 \\ 0 & 0 & -2 - \lambda \end{pmatrix}$. Ainsi, en développant par rapport à la dernière ligne, on a :

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (-2 - \lambda) \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -3 \\ 6 & -5 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (-2 - \lambda) [(4 - \lambda)(-5 - \lambda) + 18] \\ &= (-2 - \lambda) \underbrace{(\lambda^2 + \lambda - 2)}_{=(\lambda-1)(\lambda+2)} \\ &= -(\lambda + 2)^2(\lambda - 1) \end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont donc -2 et 1 .

- b) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On a $A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix}$ donc $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 1$.

La matrice A n'a pas de valeur propre réelle mais admet deux valeurs propres complexes qui sont $-i$ et i .

- c) On remarque de suite que $A - I$ est de rang 1 donc 1 est valeur propre. **On verra par la suite comment exploiter cela sans aucun calcul.**

Soit λ dans $\mathbb{C}$. On a $A_\lambda I = \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2 - \lambda \end{pmatrix}$. En remplaçant la première colonne par la somme de toutes les colonnes il vient :

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 & 1 \\ 4 - \lambda & 2 - \lambda & 1 \\ 4 - \lambda & 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix}.$$

Un développement par rapport à la première colonne donne alors :

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (4 - \lambda) \left(\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 - \lambda & 1 \end{vmatrix} \right) \\ &= (4 - \lambda) ((2 - \lambda)^2 - 1 - 2 + \lambda + 1 + 1 + \lambda - 2) \\ &= (4 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = (4 - \lambda)(\lambda - 1)^2 \end{aligned}$$

Conclusion. Les valeurs propres de A sont 1 et 4.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On a $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$ et ainsi :

$$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)^2 + 1 = (1 - \lambda)^2 - i^2 = (1 - i - \lambda)(1 + i - \lambda)$$

Conclusion. Les valeurs propres complexes de A sont $1 - i$ et $1 + i$.

Exercice 14

On raisonne par *analyse/synthèse*.

Analyse. Supposons que $E = \text{Im } f + \ker f$. Soit x dans E . On peut alors écrire $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$. Ainsi :

$$f(x) = f(y) + f(z) = p(y).$$

Comme $y \in \text{Im } f$, il existe x' dans E tel que $y = f(x')$. Il vient alors :

$$f(x) = f(y) = f(f(x')) = f^2(x') = f(x'),$$

puisque $f^2 = f$. Il en résulte que :

$$(\spadesuit) \begin{cases} y = f(x) \\ z = x - f(x) \end{cases}$$

Synthèse. Soit x dans E . On définit y et z par $(\spadesuit)$. On a alors :

$$\begin{cases} x = y + z \\ y = f(x) \in \text{Im } f \\ f(z) = f(x) - f^2(x) = f(x) - f(x) = 0 \text{ donc } z \in \ker f \end{cases}.$$

Il en résulte que $E = \text{Im } f + \ker f$ et même $E = \text{Im } f \oplus \ker f$, puisque d'après $(\spadesuit)$, la décomposition est unique.

Exercice 15

1. L'ensemble $\{q \in \mathbb{N} \mid N^q = 0\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$: elle admet un plus petit élément. Il existe donc un plus petit entier p tel que $N^p = 0$.
2. Posons $B = \sum_{k=0}^{p-1} N^k$ (notons que p ne peut être égal à 0, puisque $N^0 = I \dots$). On a alors :

$$AB = (I - N) \sum_{k=0}^{p-1} N^k = I - N^p = I.$$

Ainsi A est inversible d'inverse B .

3. D'après la question précédente, on a : $(I - A^{-1}) = \sum_{k=1}^{p-1} N^k$. Ainsi, en posant $M = I - A^{-1}$, on aura $M^p = 0$ puisqu'en développant, tous les termes contiendront une matrice de la forme N^q avec $q \geq p$ entier, qui est nulle.

Exercice 16

1. • Utilisons nos connaissances de terminale. F est une droite vectorielle de paramétrisation $\begin{cases} x = -\frac{t}{2} \\ y = \frac{t}{2} \\ z = t \end{cases}$. Ainsi F

est un sous-espace vectorielle de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1 et une base de F est donnée par un vecteur directeur de cette droite, par exemple $\varepsilon_1 = (-2, 2, 1)$.

• G est le noyau de la forme linéaire $g : (x, y, z) \mapsto x - y + z$. Ainsi G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2. Puis les vecteurs $\varepsilon_2 = (1, 1, 0)$ et $\varepsilon_3 = (1, 0, -1)$ sont dans G et ne sont pas colinéaires : $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de G .

• On a $F \subset G$ donc $F \cap G = F$ et $F \cup G = G$.

2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer le noyau et l'image de f .

Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de M . Comme C_1 et C_2 ne sont pas proportionnelles, $\text{rg } M \geq 2$. Puis $C_1 - 2C_2 + C_3 = 0$, donc $\text{rg}(M) \leq 2$. Le théorème du rang affirme alors que $\ker f$ est de dimension 1.

Puisque $C_1 - 2C_2 + C_3 = 0$, en notant (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a $f(e_1 - 2e_2 + e_3) = 0$. Il en résulte que $\ker f = \text{vect}(1, -2, 1)$.

Puis $\text{Im } f = \text{vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \text{vect}(f(e_1), f(e_2))$ puisque $f(e_3)$ est combinaison linéaire de $f(e_1) = \varepsilon_2$ et $f(e_2) = \varepsilon_3$. Ainsi, comme $\text{Im } f$ est de dimension 2, une base de $\text{Im } f$ est $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$, donc $\text{Im } f = F$.

Exercice 17

1. • Montrons que la famille $\mathcal{B}$ est libre. Soient $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ et α_3 des réels tels que :

$$\alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = 0_E.$$

Comme $\exp > 0$, il vient pour tout x réel : $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 = 0_{\mathbb{R}}$.

Il en résulte que le polynôme $\sum_{i=0}^3 \alpha_i X^i$ est nul donc tous ses coefficients sont nuls. Ainsi $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0_{\mathbb{R}}$.

Conclusion. $\mathcal{B}$ est une famille libre de F .

- La famille $\mathcal{B}$ est libre dans F et engendre F , par définition de F : c'est donc une base de F . Comme cette famille est de cardinal 4, on a $\dim F = 4$.

2. Par linéarité de la dérivation, D est linéaire.

On a :

- On a $f'_0 = -f_0$ et $f''_0 = f_0$, donc $D(f_0) = -2f_0$.
- $f'_1 = -f_1 + f_0$, $f''_1 = -f'_1 + f'_0 = f_1 - f_0 - f_0$. Ainsi $D(f_1) = -2f_1 + 3f_0$.
- $f'_2 = 2f_1 - f_2$ et $f''_2 = 2f'_1 - f'_2 = -2f_1 + 2f_0 - 2f_1 + f_2$. Ainsi $D(f_2) = -2f_2 + 6f_1 - 3f_0$.
- $f'_3 = 3f_2 - f_3$ et $f''_3 = 3f'_2 - f'_3 = 6f_1 - 3f_2 - 3f_2 + f_3$ donc $D(f_3) = -2f_3 + 9f_2 - 6f_1$.

Ainsi les images par D des éléments de $\mathcal{B}$ sont encore dans F . Il en résulte que D est un endomorphisme de F et sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. La matrice M est inversible : 0 n'est pas valeur propre de M .

Exercice 18

1. L'application ψ est bien bilinéaire, symétrique et positive (à montrer).

Soit $P \in E$ tel que $\psi(P, P) = 0$ alors $\int_0^1 P^2 = 0$. Comme $t \mapsto P^2(t)$ est une application **continue** et **positive**, on peut dire que pour tout $t \in [0, 1]$ on a $P^2(t) = 0$ donc $P(t) = 0$. Ainsi le polynôme P **admet une infinité de racines** ce qui permet de dire que $P = 0$.

Conclusion. Ψ est bien une forme bilinéaire définie positive : c'est un produit scalaire sur E .

2. L'application ψ est bien bilinéaire, symétrique et positive (à montrer).

Comme ci-dessus, si $f \in F$ vérifie $\psi(f, f) = 0$ alors f est nulle sur $[0, 1]$ mais rien ne permet d'affirmer qu'elle est nulle sur $\mathbb{R}$. Mieux il existe (facile) des fonctions continues non nulles sur $\mathbb{R}$ mais nulles sur l'intervalle $[0, 1]$.

Conclusion. ψ n'est pas un produit scalaire sur F .

FIN DE LA CORRECTION
