Devoir n$^\text{o}$ 0

Pour le mardi 3 septembre 2024

Avant de faire ce devoir :
— réviser le cours de première année en insistant sur ce que vous n'avez pas bien assimilé et en s'aidant de la liste suivante ;
— reprendre ensuite vos devoirs de l'année, ainsi que les feuilles d'exercices.

Aide à la révision.

Voici une liste, non exhaustive, de quelques notions à revoir, classées selon les thèmes principaux du programme.

1 - Analyse.

1. Définition d'une fonction.
2. Définitions des fonctions injectives, surjectives, bijectives.
3. Limites de fonctions, en particulier de suites. Caractérisation séquentielle de la limite.
4. Fonctions continues, caractérisation séquentielle de la continuité.
5. Fonctions dérivables. Toutes les formules usuelles de dérivation.
6. Théorème de Rolle et égalité des accroissements finis avec son interprétation géométrique.
7. Calcul d'intégrale. Primitives usuelles. Intégration par partie.
8. Formules de Taylor. En particulier la formule de Taylor-Young pour retrouver les développements limités, notamment ceux à l'ordre 1 ou 2 en 0.
9. **Développement limités usuels en 0 (au moins à l'ordre 3)**.
10. **Suites**, notamment les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.
11. **Les séries**.
12. Convexité, signification.
13. Fonctions de deux variables : dérivées partielles (définition), gradient, points critiques, extrema.

2 - Algèbre

1. Les nombres complexes (racines de l'unité notamment).
2. Les polynômes. Ordre de multiplicité d'une racine. Conditions suffisantes pour qu'un polynôme soit nul.
3. Sous-espaces vectoriels.
4. Applications linéaires.
5. Parties libres et génératrices.
6. Dimension finie et théorème du rang.
7. Calcul matriciel. Définition du rang d'une matrice. Inverser une matrice. Caractériser une matrice inversible.
8. Calcul pratique des déterminants, développer selon une ligne ou une colonne.
9. Représentation d'applications linéaires dans des couples de bases.
10. Formes linéaires.
11. Les produits scalaires et la notion d'orthogonalité.

3 - Probabilités

1. Indépendance et probabilités conditionnelles.
2. Formule des probabilités totales.
3. Variables aléatoires, espérance.
4. Les lois usuelles (uniforme discrète, Bernoulli, binomiale)

Partie I - Exercices d'analyse

Exercice 1
On rappelle que lorsque (u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 1$ alors **la somme de termes consécutifs de cette suite se calcule par la formule** :

$$\boxed{\frac{\text{premier terme} - \text{dernier terme} \times \text{raison}}{1 - \text{raison}}}.$$

Par exemple $\displaystyle\sum_{k=5}^{1000} u_k = \frac{u_5 - u_{1000} \times q}{1-q}$.

1. Pour x réel dans $]-1,1[$, démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 15} x^n$ converge de somme $\displaystyle\sum_{n=15}^{+\infty} x^n = \frac{x^{15}}{1-x}$.
2. Déterminer, pour n entier et x réel, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ikx}$; en déduire une expression simple de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$.

Exercice 2
Soit $k > 0$.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x^{k+1} + x^k - n = 0$ admet une unique solution x_n dans $]0, +\infty[$.
2. Etudier les variations et la limite éventuelle de la suite (x_n).
3. Déterminer un équivalent simple de la suite (x_n) en $+\infty$.

Exercice 3
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $2\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Démontrer que f a un point fixe dans $]0,1[$.

Exercice 4
Soit P un polynôme à coefficients réels, de degré impair. Démontrer que P admet au moins une racine réelle.

Exercice 5
Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Déterminer la solution générale sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - y = h(t)$.

Exercice 6
On considère l'équation différentielle : $(E)\quad xy' + y = \dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$. Résoudre (E) sur chacun des intervalles $]-1,0[$ et $]0,1[$ et en déduire que (E) admet une unique solution sur $]-1,1[$.

Exercice 7
Soient $n \geqslant 2$ entier et $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré n, qui admet n racines réelles distinctes. Démontrer que P' admet $n-1$ racines réelles distinctes.

Exercice 8
Soient $a < b$ réels et f dans $\Delta^2([a,b], \mathbb{R})$ telle que $f(a) = f'(a)$ et $f(b) = f'(b)$. Montrer qu'il existe $c \in\,]a;b[$ tel que $f''(c) = f(c)$.
Aide : considérer la fonction $h : x \mapsto e^{-x}(f(x) + f'(x))\ldots$

Exercice 9
Soient α un réel, f dans $\Delta^1(]0,+\infty[, \mathbb{R})$ ayant $n \geqslant 2$ zéros. Soit $g : x \mapsto \alpha f(x) + f'(x)$. Démontrer que g admet au moins $n-1$ zéros.
Aide : avoir une idée du même style qu'à l'exercice précédent...

Exercice 10
On considère une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \exp\left(\frac{1}{n} f\left(\frac{1}{k}\right)\right) \quad \text{et} \quad v_n = (u_n)^n.$$

1. Dans cette question uniquement, on suppose que pour tout $x \in [0,1]$ on a $f(x) = x^2$.
   a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :
   $$\ln v_n = n\left(-\ln(n) + \frac{1}{n^2} + \ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1\right) - \ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}} - 1\right)\right).$$
   b) À l'aide d'un développement limité à l'ordre 2, démontrer que :
   $$\ln(\mathrm{e}^x - 1) \underset{x\to 0}{=} \ln x + \frac{x}{2} + \mathrm{o}(x).$$
   c) Étudier la limite de éventuelle de la suite (v_n).
2. Soit t réel.
   a) Démontrer que $|\mathrm{e}^t - 1| \leqslant |t|\,\mathrm{e}^{|t|}$
   b) Démontrer que $|\mathrm{e}^t - 1 - t| \leqslant \dfrac{t^2}{2}\mathrm{e}^{|t|}$
3. a) Démontrer qu'il existe un réel M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \{1, \dots, n\}$ on ait :
   $$\left|\exp\left(\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right| \leqslant \frac{M}{n}.$$
   b) En déduire que $u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 1$ puis que $\ln(v_n) \underset{n\to\infty}{\sim} n(u_n - 1)$.
   c) Établir qu'il existe un réel K tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \{1, \dots, n\}$ on ait :
   $$\left|n(u_n - 1) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{K}{n}.$$
   d) En déduire la limite de la suite (v_n).
4. Soit $g[0,1] \to \mathbb{R}$, continue et strictement positive.
   Déterminer, si elle existe, la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt[n]{g\left(\frac{k}{n}\right)}\right)^n$

Partie II - Exercices de mathématiques générales et d'algèbre linéaire

Exercice 11
Soient X et Y deux ensembles, $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$.

1. On suppose que $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$. Démontrer que f est surjective et que g est injective.
2. On suppose que $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_X$. Démontrer que f est bijective. Quelle est la réciproque de f dans ce cas ?

Exercice 12
Soient $n \geqslant 1$ entier et $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur à n. On considère l'application $f : E \to E$ définie par $f(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Démontrer que f est un endomorphisme de E et déterminer sa matrice dans la base canonique de E.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 13 (Valeurs propres d'une matrice)
Dans cet exercice, la lettre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $n \geqslant 1$ un entier. La lettre I désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soient M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ *est valeur propre de* M *dans* $\mathbb{K}$ lorsque la matrice $M - \lambda I$ n'est pas inversible.

Une manière de déterminer les valeurs propres d'une matrice M est la suivante : on calcule pour $\lambda \in \mathbb{K}$ le déterminant $\det(\lambda I - M)$ et alors « *les valeurs propres de* M *sont exactement les valeurs de* λ *qui annulent ce déterminant* ».

1. Pouvez-vous expliquer la phrase en italique ci-dessus ?
2. Déterminer les valeurs propres dans $\mathbb{R}$ des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 9 \\ 6 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Déterminer les valeurs propres dans $\mathbb{C}$ de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 14
Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, f dans $\mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = f$. Démontrer que : $E = \operatorname{Im} f \oplus \ker f$.

Exercice 15
Soit N une matrice carrée telle qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ avec $N^q = 0$ (on dit que N est *nilpotente*).

1. Démontrer qu'il existe un plus petit entier p tel que $N^p = 0$.
2. Justifier que $A = I - N$ est inversible.
3. Démontrer que $(I - A^{-1})$ est nilpotente.

Exercice 16
Soient F et G les parties de $\mathbb{R}^3$ définies par :

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0 \text{ et } x + y = 0\right\} \text{ et } G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\right\}.$$

1. Démontrer que F, G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer la dimension ainsi qu'une base. Déterminer $F \cap G$ et $F \cup G$.

2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

   Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 17
Soit $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles et E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$ engendré par la famille $\mathcal{B} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$ où $f_k : x \mapsto x^k \mathrm{e}^{-x}$ pour $k \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E.
2. Soit D l'application définie sur E par :

$$D(f) = f' - f''.$$

   Démontrer que D est un endomorphisme de E et écrire sa matrice M dans la base $\mathcal{B}$.
3. M est-elle inversible ?

Exercice 18
Soient $E = \mathbb{R}[X]$ et F l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. L'application $\varphi : (P, Q) \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ est-elle un produit scalaire sur E ?
2. L'application $\psi : (f, g) \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ est-elle un produit scalaire sur F ?

Fin de l'énoncé
