De l'importance du théorème de convergence commutative.

Avertissement. L'idée est de souligner l'importance du théorème de convergence commutative pour les séries absolument convergentes.

Prenons la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$ qui converge (voir les exercices pour cela) de somme

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2$$

On appelle u_n le terme général de cette série i.e. $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ pour tout $n \geqslant 0$ entier.

La série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ n'est pas absolument convergente puisque la série harmonique diverge. On va sommer dans un ordre différent les termes de cette série et on va montrer que la somme obtenue est différente de $\ln 2$.

On somme les termes de $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ de façon qu'un terme positif soit suivi de deux termes négatifs :

$$\underbrace{1}_{=v_0} \underbrace{-\frac{1}{2}}_{=v_1} \underbrace{-\frac{1}{4}}_{=v_2} + \underbrace{\frac{1}{3}}_{=v_3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} + \cdots$$

On va démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge et que sa somme S est $\frac{\ln 2}{2}$.

Notons pour $n \geqslant 0$ entier $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ les sommes partielles des séries considérées. Pour $n \geqslant 1$ on a :

$$V_{3n} = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right)$$

on calcule la somme des deux premiers termes de chaque parenthèse pour obtenir :

$$\begin{aligned}
V_{3n} &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) \\
&= \frac{1}{2} U_{2n}
\end{aligned}$$

On a donc $\exists \lim_{n\to+\infty} V_{3n} = \dfrac{\ln 2}{2}$ puisque $\lim_{n\to+\infty} U_{2n} = \ln 2$.

Puis pour $n \geqslant 1$ entier on a :

$$V_{3n+1} = V_{3n} + \frac{1}{2n+1} \quad \text{et} \quad V_{3n+2} = V_{3n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{4n-2}$$

donc

$$\exists \lim_{n\to+\infty} V_{3n+1} = \frac{\ln 2}{2} \quad \text{et} \quad \exists \lim_{n\to+\infty} V_{3n+2} = \frac{\ln 2}{2}$$

Alors, « trois par trois », on peut affirmer : $\exists \lim_{n\to+\infty} V_n = \dfrac{\ln 2}{2}$.

Il en résulte que $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge de somme :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \frac{\ln 2}{2}}$$

Après réorganisation des termes « la somme de la série $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ a changé » !!!!