Preuve du théorème de Leibniz.

• Théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre. *Soient I et X deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : X \times I \to \mathbb{C}$. On suppose :*

(H1) Pour tout $x \in X$ la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I (en particulier $C^0 - PM$).

(H2) Pour tout $t \in I$ la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur X.

(H3) La fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est $C^0 - PM$ sur I, pour tout $x \in X$.

(H4) Il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que :

$$(\forall x \in X)(\forall t \in I)\left(\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)\right).$$

La fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est alors de classe C^1 sur X avec :

$$g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Soit $a \in X$. On montre que f est dérivable en a. Pour cela on regarde le quotient, pour $x \neq a$ dans X :

$$\Delta(x) = \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \int_I \underbrace{\frac{f(x,t)-f(a,t)}{x-a}}_{=h(x,t)}\,\mathrm{d}t.$$

— A t fixé dans I, d'après l'hypothèse *(H2)*, on a :

$$h(x,t) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,t).$$

— A x fixé dans $X \setminus \{a\}$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue par morceaux sur I d'après *(H1)*.

— La fonction ℓ est aussi continue par morceaux sur I d'après l'hypothèse *(H3)*

— Avec l'hypothèse *(H4)*, pour tout t dans I la dérivée de $x \mapsto f(x,t)$ est bornée par $\varphi(t)$. L'inégalité des accroissements finies permet donc d'écrire que pour tout x dans $X \setminus \{a\}$ et $t \in I$ on a :

$$|h(x,t)| \leqslant \varphi(t),$$

où $\varphi : I \to \mathbb{C}$ est intégrable sur I.

Avec les quatre points ci-dessus on peut appliquer le théorème de convergence dominée à paramètre continu qui affirme que ℓ est une fonction intégrable sur I et que :

$$\Delta(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \int_I \ell(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi g est dérivable en a avec :

$$g'(a) = \int_I \ell(t)\,\mathrm{d}t = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)\,\mathrm{d}t.$$

Ceci étant vrai quelque soit le choix de a dans X, g est dérivable sur I de dérivée :

$$g' : x \mapsto \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

On peut alors appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètres pour montrer que g' est continue sur I.

$\square$