Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes

Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes

• Dans toute cette note, I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Prenons A dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Appelons $L_1, \dots, L_n$ ses lignes et $C_1, \dots, C_p$ ses colonnes. Pour (i,j) dans $\{1, \dots n\}^2$, on considère la matrice E_{ij} de la famille base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Question. Que se passe t-il si on effectue la multiplication $E_{ij}A$?

La réponse est : $E_{ij}A = \begin{array}{c} \\ \text{ligne i} \quad \longrightarrow \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 \\ \hline L_j \\ \hline 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (La ligne i du résultat est en fait la ligne j de la matrice A et il ne reste que des zéros partout ailleurs).

Pour voir cela, on peut s'en persuader immédiatement si on a bien compris la multiplication des matrices ou on peut faire le calcul suivant. On décompose A dans la famille base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ c'est à dire on écrit $A = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{p} a_{k\ell} E_{k\ell}$; on obtient alors :

$$E_{ij}A = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{p} a_{k\ell} E_{ij} E_{k\ell} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{p} a_{k\ell} \delta_j^k E_{i\ell} = \sum_{\ell=1}^{p} a_{j\ell} E_{i\ell}$$

ce qui donne bien le résultat annoncé.

• On veut maintenant modéliser pour i et j distincts dans $\{1, \dots, n\}$ les opérations suivantes, appelées **opérations élémentaires sur les lignes** (**OEL** en abrégé) de A.

(OEL1) $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$: addition de λL_j à L_i

(OEL2) $L_i \leftarrow \lambda L_i$: multiplication de L_i par $\boxed{\lambda \neq 0}$

(OEL3) $L_i \leftrightarrow L_j$: échange des lignes L_i et L_j

On peut noter que ces opérations élémentaires sont **réversibles** : si A est obtenu à partir de B par une OEL alors on peut revenir sans problème à B par une OEL :

Passage de A à B	Passage de B à A
$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	$L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j$
$L_i \leftarrow \lambda L_i$	$L_i \leftarrow \lambda^{-1} L_i$
$L_i \leftrightarrow L_j$	$L_j \leftrightarrow L_i$

Théorème 1
Deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ déduites l'une de l'autre par une opération élémentaire sur les lignes ont même rang.

Démonstration. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$ engendré par les lignes de A et G le sous-espace engendré par les lignes de B. Chaque ligne de B est combinaison linéaire des lignes de A donc $G \subset F$. Mais il y a réversibilité donc on a aussi $G \subset F$ d'où l'égalité $G = F$. $\square$

Commentaire. C'est la même justification utilisée pour affirmer que l'on ne change pas le rang d'une famille de vecteur en ajoutant à un des vecteurs de la famille une combinaison linéaire des autres.

• On peut noter que chaque OEL se traduit par une **multiplication à gauche** par une matrice inversible (ce qui ne change donc pas le rang, ni d'ailleurs « le noyau ») :

OEL	Multiplication à gauche par
$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	$I_n + \lambda E_{ij}$
$L_i \leftarrow \lambda L_i$	$I_n - E_{ii} + \lambda E_{ii}$
$L_i \leftrightarrow L_j$	$I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$

Pour démontrer cela on utilise l'effet vu ci-dessus de la multiplication à gauche par E_{ij}.

• Les OEC (**opérations élémentaires sur les colonnes**) s'obtiennent quant à elle en multipliant à droite par des matrices inversibles :

OEC	Multiplication à gauche par
$C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$	$I_p + \lambda E_{ji}$
$C_i \leftarrow \lambda C_i$	$I_p - E_{ii} + \lambda E_{ii}$
$C_i \leftrightarrow C_j$	$I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$

Application des OEL au calcul du rang

Soit A une matrice de la forme :

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} a & * & \cdots & \heartsuit \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

où $\boxed{a \neq 0}$ et $B \in \mathcal{M}_{n-1,p-1}(\mathbb{K})$ (et on se moque royalement de ce que sont les $*$, $\heartsuit$ et autres babioles). On a alors :

$$\boxed{\mathrm{rg}(A) = 1 + \mathrm{rg}(B)}$$

En effet notons F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$ engendré par les lignes $L_1, \ldots, L_n$ de A. Comme $a \neq 0$, L_1 n'est pas combinaison linéaires des autres lignes donc $L_1 \notin \mathrm{vect}(L_2, \ldots, L_n)$ et ainsi $F = \mathbb{K}\, L_1 \oplus \mathrm{vect}(L_2, \ldots, L_n)$ donc on obtient :

$$\mathrm{rg}(A) = \dim F = \dim \mathbb{K}\, L_1 + \dim \mathrm{vect}(L_2, \ldots, L_n) = 1 + \mathrm{rg}(B)$$

Commentaire.

1. C'est une autre traduction du fait qu'une famille « *échelonnée* » est libre.
2. Pour déterminer le rang d'une matrice on peut donc à l'aide d'OEL transformer une matrice donnée M en une matrice de la forme

$$\left(\begin{array}{c|ccc} a & * & \cdots & \heartsuit \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

et itérer ce procéder avec B : c'est la méthode du pivot de Gauß. On s'arrête lorsque l'on connaît le rang de B de manière certaine. Le a est le premier pivot ...

A la fin on obtient une **matrice triangulaire supérieure** (qui correspond grosso modo à nos familles « *échelonnées* »).

Exercice. Déterminer le rang de :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$