Fonctions d'une variable réelle.

Sommaire

1 Limites des fonctions d'une variable réelle **1**
- 1.1 Définition de la limite . . . 1
- 1.2 Limite à gauche et à droite . . . 2
- 1.3 Limite épointée . . . 2
- 1.4 Monotonie et limites à droite et à gauche . . . 2
- 1.5 Caractérisation séquentielle de la limite . . . 3

2 Continuité **4**
- 2.1 Généralités . . . 4
- 2.2 Caractérisation séquentielle de la continuité . . . 5

3 Dérivabilité **6**
- 3.1 Définition . . . 6
- 3.2 Les théorèmes de Rolle . . . 6
- 3.3 Le théorème des accroissements finies . . . 8

4 Les formules de Taylor **9**
- 4.1 Les formules globales . . . 9
  - 4.1.1 La formule de Taylor-Lagrange . . . 9
  - 4.1.2 La formule de Taylor-Intégrale . . . 10
- 4.2 La formule locale . . . 10

1 Limites des fonctions d'une variable réelle

1.1 Définition de la limite

Définition 1 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$, a un réel qui appartient à $\overline{I}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet ℓ pour limite en a lorsque :*

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \alpha_\varepsilon > 0)\,(\forall x \in I)\,(|x-a| \leqslant \alpha_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon)\,.$$

Exercice 1
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et a est un réel qui appartient à $\overline{I}$.

1. Démontrer que lorsque f admet une limite réelle ℓ en a alors cette limite est unique. *Cela permet d'utiliser la notation* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.
2. Démontrer que lorsque f admet une limite réelle ℓ en a alors f est bornée au voisinage de a.

1. Supposons, avec les notations de la définition, que f admette en a deux limites ℓ et λ. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$ tels que si $x \in I$ on ait :
$$\begin{cases} |x-a| \leqslant \alpha_1 \Rightarrow |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon \\ |x-a| \leqslant \alpha_2 \Rightarrow |f(x)-\lambda| \leqslant \varepsilon \end{cases}.$$
Ainsi, dès que x dans I vérifie $|x-a| \leqslant \min(\alpha_1, \alpha_2)$ on a :
$$|\ell-\lambda| = |\ell - f(x) + f(x) - \lambda| \underbrace{\leqslant}_{IT} |\ell - f(x)| + |f(x)-\lambda| \leqslant 2\varepsilon.$$
On a donc, pour tout $\varepsilon > 0$, $|\ell-\lambda| \leqslant \varepsilon$. Si $\ell \neq \lambda$ en prenant $\varepsilon = \dfrac{|\ell-\lambda|}{2}$ on obtient une contradiction.
2. On suppose que f admet une limite réelle ℓ en a. Il existe $\alpha > 0$ tel que si $x \in$ et $|x-a| \leqslant \alpha$ on a ait : $|f(x)-\ell| \leqslant 1$.
Ainsi dès que $x \in I \cap [a-\alpha, a+\alpha]$ on a :
$$|f(x)| = |f(x) - \ell + \ell| \leqslant |f(x)-\ell| + |\ell| \leqslant 1 + |\ell|\,.$$

Remarque 1.1
1. J'ai pris comme cadre une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ mais on peut tout à fait prendre une partie A quelconque de $\mathbb{R}$. Dans ce cas, on prend pour a un point *adhérent* à A...
2. Avec les notations de la définition 1, lorsque $a \notin I$, on dit que f admet pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers a si :
$$(\forall A \in \mathbb{R})\,(\exists \alpha_A > 0)\,(\forall x \in I)\,(|x-a| \leqslant \alpha_A \Rightarrow f(x) \geqslant A)\,.$$
Il y a encore « unicité de la limite » d'où la notation $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.

3. On peu donner bien sûr des définitions équivalentes pour les notations $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$...(le faire !)

Théorème 1 (Composition des limites)
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$, a un élément de I ou une borne de I, b un élément de J ou une borne de J, et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b$ et $g(x) \underset{x\to b}{\longrightarrow} \ell$. Alors :

$$g \circ f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell.$$

Remarque 1.2
On peut aussi composer des fonctions qui ne sont pas forcément définies sur des intervalles, mais pour lesquelles les la composition est possible et les limites existent.

Exercice 2
Démontrer le théorème 1 dans le cas où a, b et ℓ sont des réels.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $g(x) \underset{x\to b}{\longrightarrow} \ell$, il existe $\eta > 0$ tel que les relations $y \in J$ et $|y - b| \leqslant \eta$ impliquent :

$$|g(y) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Comme $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b$, il existe $\alpha > 0$ tel que les relations $x \in I$ et $|x - a| \leqslant \alpha$ impliquent $|f(x) - b| \leqslant \eta$.

Ainsi, pour tout x dans I tel que $|x - a| \leqslant \alpha$, comme $|f(x) - b| \leqslant \eta$, il vient :

$$|g(f(x)) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

1.2 Limite à gauche et à droite

Définition 2 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$, non borne de I, $\ell \in \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f admet ℓ pour limite à gauche en a lorsque la restriction $f\,|_{I\cap]-\infty,a[}$ admet ℓ pour limite en a.*

Remarque 1.3
1. On peut bien sûr définir des notions de limite réelle à droite, de limite infinie à droite et gauche...(le faire !).
2. Avec les notations de la définition précédente, la limite à droite en a, lorsqu'elle existe, se note :

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) \quad \text{ou} \quad f(a+0),$$

(cette dernière notation pouvant prêter à confusion...).

3. Pour bien comprendre, si f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ alors f admet une limite à droite et à gauche en 0 qui sont respectivement $f(a+0) = 1$ et $f(a-0) = 0$. Mais f n'admet pas en a de limite.

1.3 Limite épointée

Définition 3 *Soient $\ell \in \mathbb{R}$, $a \in I$ intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f admet ℓ pour limite épointée en a lorsque la restriction $f\,|_{I\setminus\{a\}}$ admet ℓ pour limite en a.*

Remarque 1.4
1. On peut aussi parler de limite infinie épointée en a.
2. Comme pour les notions précédentes de limite, il y a unicité de la limite épointée. La notation est la suivante :

$$\lim_{x\to a^\bullet} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{a^\bullet} f$$

Exercice 3
Trouver une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que g admette une limite à droite et à gauche en 0, une limite épointée en 0, mais n'admette pas de limite en 0.

On prend la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1.4 Monotonie et limites à droite et à gauche

Théorème 2
Soient $\tilde{a} < \tilde{b}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ et $f :]\tilde{a}, \tilde{b}[\to \mathbb{R}$. Si f est monotone sur $]\tilde{a}, \tilde{b}[$ alors f admet une limite (qui peut être infinie) en $\tilde{a}$ et $\tilde{b}$.

Démonstration. Supposons que f est croissante sur $]\tilde{a},\tilde{b}[$. L'ensemble $\mathcal{E} = \left\{f(x) \mid x \in]\tilde{a},\tilde{b}[\right\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$. Ainsi on, peut considérer :

$$\begin{cases} \ell & = \inf \mathcal{E} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \\ L & = \sup \mathcal{E} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \end{cases}$$

On distingue deux cas.

— **Cas 1**. Supposons que $L \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Par caractérisation de la borne supérieure, il existe $A \in \mathcal{E}$ tel que $L \leqslant A + \varepsilon$. Puis il existe $a \in]\tilde{a},\tilde{b}[$ tel que $f(a) = A$. Si $x \geqslant a$ avec $x \in]\tilde{a},\tilde{b}[$ on aura, par croissance de f, $L \leqslant f(x) + \varepsilon$ de sorte que :

$$|f(x) - L| \leqslant \varepsilon.$$

Il en résulte que $\lim\limits_{\tilde{b}} f = L$.

— **Cas 2**. On suppose que $L = +\infty$. Soit A réel. Comme $\sup \mathcal{E} = +\infty$, il existe $a \in]\tilde{a},\tilde{b}[$ tel que $f(a) \geqslant A$. Par croissance de f, si $x \geqslant a$ avec $x \in]\tilde{a},\tilde{b}[$, on aura $f(x) \geqslant A$, ce qui signifie exactement que $\lim\limits_{\tilde{b}} f = +\infty$.

Tout ce qui manque se traite de la même manière. □

Corollaire 2.1
Toute fonction monotone sur un intervalle ouvert admet une limite à droite réelle et une limite à gauche réelle en tout point de cet intervalle.

Exercice 4
Démontrer ce corollaire.

On pose $I =]\tilde{a},\tilde{b}[$ où $\tilde{a} < \tilde{b}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. On suppose que $f : I \to \mathbb{R}$ est croissante. Soit $a \in I$. La fonction $g = f\,|_{]\tilde{a},a[}$ est croissante et majorée par $f(a)$. Selon le théorème 2, elle admet donc en a une limite réelle en a i.e. f admet une limite à gauche réelle en a. Le reste se traite de la même manière.

Exercice 5

1. Démontrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dénombrable.
2. Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une énumération de $\mathbb{Q}$. Pour x réel on pose :

$$f(x) = \sum_{r_n < x} \frac{1}{2^n}.$$

a) Justifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et croissante.
b) Démontrer que tout nombre rationnel est un point de discontinuité de la fonction f.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction monotone. Soit Δ l'ensemble des points de discontinuité de f. Pour a dans Δ, les intervalles $I_a =]f(a-0), f(a+0)[$ sont non vides et disjoints deux à deux. On construit alors une injection $f : \Delta \to \mathbb{Q}$ en posant pour $a \in \Delta : f(a) = r_a$ où r_a est un rationnel appartenant à l'intervalle I_a.
2. a) Comme la série $\sum 2^{-n}$ converge, la fonction f est bien définie.
   Si $x < y$ dans $\mathbb{R}$, il existe un rationnel dans l'intervalle $]x, y[$ donc f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.
   b) Soit $x_0 \in \mathbb{Q}$. Il existe alors $m \in \mathbb{N}$ tel que $x_0 = r_m$.
   Ainsi pour tout rationnel $r > x_0$ on a : $f(x_0) + \dfrac{1}{2^m} \leqslant f(r)$.
   Il en résulte immédiatement que $f(x_0) < f(x_0+0)$: f n'est pas continue en x_0.

1.5 Caractérisation séquentielle de la limite

Théorème 3
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un élément de I ou une borne de I, $f : I \to \mathbb{R}$. Pour ℓ réel, les propriétés suivantes sont équivalentes.

(1) $\lim\limits_{a} f = \ell$.

(2) Pour toute suite (x_n) dans I telle que $x_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} a$ on a :

$$f(x_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Exercice 6
Démontrer le théorème 3.

Le sens (1) $\subset$ (2) relève de la composition des limites (adapter la preuve du théorème 1).

Supposons que pour toute suite (x_n) dans I telle que $x_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} a$ on a : $f(x_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$.. Montrons que $\lim_a f = \ell$. On raisonne par l'absurde. Ainsi :

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \alpha > 0)(\exists x \in I)(|x - a| \leqslant \alpha \text{ et } |f(x) - \ell| > \varepsilon).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha = 2^{-n}$, il existe donc x_n dans I tel que :

$$|x_n - a| \leqslant 2^{-n} \text{ et } |f(x_n) - \ell| > \varepsilon.$$

On a ainsi construit une suite (x_n) dans I telle que $x_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} a$ mais la suite $(f(x_n))$ ne converge pas vers ℓ : c'est absurde.

Remarque 1.5

1. Il y a bien sur des énoncés analogues en remplaçant a par $\pm\infty$ ou ℓ par $\pm\infty$.
2. Ce théorème s'utilise souvent dans le sens (2) $\Rightarrow$ (1), le sens (1) $\Rightarrow$ (2) n'étant qu'une version du ***théorème de composition des limites***.

2 Continuité

2.1 Généralités

Définition 4 *Soient $a \in I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est continue en a lorsque $\exists \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. La fonction f sera dite continue (sur I) lorsque f est continue en tout point de I.*

Théorème 4
Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue alors $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Remarque 2.1

1. Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont exactement les parties convexes de $\mathbb{R}$. Pour montrer que I est un intervalle, on montre que pour tout $(x, y) \in I^2$ et $\lambda \in [0, 1]$ on a :
$$(1 - \lambda)x + \lambda y \in I.$$
Notez que $(1 - \lambda)x + \lambda y$ pour λ dans $[0, 1]$ est une paramétrisation du segment d'extrémités x et y.
Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont aussi exactement les *parties connexes* de $\mathbb{R}$.
2. Ce théorème est est un cas particulier d'un énoncé plus général : *l'image d'un connexe par une application continue est un connexe.*

Corollaire 4.1 (Théorème des valeurs intermédiaires)
Soient $a < b$ dans I intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Pour tout y entre (au sens large) $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in [a, b]$ tel que $y = f(x)$.

Démonstration. Puisque f est continue, $f([a, b])$ et un intervalle qui contient $f(a)$ et $f(b)$. □

Exercice 7
Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $2 \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Démontrer que f a un point fixe dans $]0, 1[$.

Soit g la fonction définie sur $[0, 1]$ par $g(x) = f(x) - x$. Raisonnons par l'absurde et supposons que g ne s'annule pas sur $]0, 1[$. Comme elle est continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, on a $g > 0$ ou $g < 0$ sur $]0, 1[$. Dans le premier cas, il vient donc :

$$0 < \int_0^1 g = \int_0^1 f - \frac{1}{2},$$

ce qui est absurde. L'autre cas se traite de même.

Théorème 5 (Weierstraß)
L'image d'un segment de $\mathbb{R}$ par une application continue à valeurs réelles est un segment. En particulier, si $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors f est bornée et atteint ses bornes.

Remarque 2.2
C'est un cas particulier d'un énoncé plus général : *l'image d'un compact par une application continue est un compact.*

Exercice 8
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui admet une limite réelle ℓ en $+\infty$. Démontrer que f est bornée.

Comme $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$, il existe $A \in R^+$ tel que pour tout $x \geqslant A$ on ait :

$$|f(x) - \ell| \leqslant 1.$$

Ainsi, si $x \geqslant A$, il vient : $|f(x)| \leqslant |f(x) - \ell| + |\ell| \leqslant 1 + |\ell|$.
Enfin f est continue sur le segment $[0, A]$: elle y est bornée par un réel positif M.

2.2 Caractérisation séquentielle de la continuité

Théorème 6
Soient $a \in I$ intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(1) *f est continue en a.*
(2) *Pour tout suite (x_n) dans I telle que $x_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} a$, on a : $f(x_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} f(a)$.*

Démonstration. C'est une simple traduction de la caractérisation séquentielle de la limite. □

Remarque 2.3
Ce théorème, qui se généralise à des applications entre espaces métriques, sert souvent à démontrer que des applications sont ou ne sont pas continues en a. Dans ce dernier, on exhibe une suite (x_n) telle que $x_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} a$ mais $f(x_n)$ ne converge pas vers $f(a)$.

Exercice 9
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction croissante.

1. Démontrer que f est continue en 0 si et seulement $\exists \lim_{n\to+\infty} f(\frac{1}{n}) = f(0)$.
2. Ce dernier résultat est-il toujours vrai si f n'est plus supposée croissante ?

• Si f est continue en 0, par composition des limites on a bien $f(\frac{1}{n}) \underset{+\infty}{\longrightarrow} f(0)$.

• On suppose $f(\frac{1}{n}) \underset{+\infty}{\longrightarrow} f(0)$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que si $n \geqslant N$ on ait $\underbrace{\left|f(\frac{1}{n}) - f(0)\right|}_{=f(\frac{1}{n})-f(0)} \leqslant \varepsilon$.
Si maintenant x est dans $[0, 1/N]$ on a alors, par croissance de f :

$$0 \leqslant f(x) - f(0) \leqslant f(1/N) - f(0) \leqslant \varepsilon.$$

On a donc bien $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} f(0)$.

• On prend la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{2\pi}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.
On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(1/n) = 0 \underset{+\infty}{\longrightarrow} f(0)$ mais en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, on a $f(x_n) = 1$. Comme $x_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, f ne peut être continue en 0.

Exercice 10
Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante et $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$. On suppose que g est décroissante. Démontrer que f est continue sur $]0, +\infty[$.

Fixons $x_0 > 0$. Comme la fonction f est croissante, elle admet en x_0 une limite à droite $f(x_0 + 0)$ et à gauche $f(x_0 - 0)$ telles que :

$$f(x_0 - 0) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0 + 0).$$

Maisd g est décroissante : elle admet donc aussi en c_0 une limite à droite et une limite à gauche avec :

$$\underbrace{g(x_0 + 0)}_{=\frac{f(x_0+0)}{x_0}} \leqslant g(x_0) \leqslant \underbrace{g(x_0 - 0)}_{=\frac{f(x_0-0)}{x_0}}$$

Il vient donc $f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0)$: f est continue en x_0.

Exercice 11
Trouver toutes les fonctions continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on ait :

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

• Supposons que f soit dérivable. En fixant y réel, pour tout x réel on a alors :$f'(x + y) = f'(x) + 0$.

On fixe alors $x = 0$, ce qui donne $f'(y) = f'(0)$. Cette dernière égalité étant valable pour tout y réel, f est à dérivée constante : c'est une fonction affine. Comme $f(0) = 0$ (remplacer x et y par $0\ldots$), on peut conclure que f est linéaire.

• **« Intégrer pour dériver ».** On ne suppose plus f dérivable.
On a pour tout y et t réel :$f(t + y) = f(t) + f(y)$.
Ainsi, à y fixé, il vient, pour tout x réel :

$$\int_0^x f(t + y)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x f(y)\,\mathrm{d}t.$$

On prend $x = 1$ pour obtenir, pour tout y réel : $f(y) = \int_0^1 f(t+y)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Mais, en remarquant que $\int_0^1 f(t+y)\,\mathrm{d}t = \int_y^{y+1} f(u)\,\mathrm{d}u = F(y+1) - F(y)$, où $F : y \mapsto \int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1, on voit que f est aussi de classe C^1 : on peut utiliser le premier point pour conclure.

3 Dérivabilité

3.1 Définition

Définition 5 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.*

1. *Lorsque $a \in I$, on dit que f est dérivable en a s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :*
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$$
Ce nombre ℓ se note alors $f'(a)$.
2. *On dit que f est dérivable sur I lorsque f est dérivable en tout point de I. On peut alors définir une fonction $f' : I \to \mathbb{R}$ qui est la fonction dérivée de f sur I.*

Théorème 7
Soient $a \in I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

Exercice 12
Démontrer le théorème 7

Supposons que f soit dérivable en a. On peut alors écrire :
$$f(x) \underbrace{=}_{x \to a} f(a) + (x-a)f'(a) + o(x-a).$$
Ainsi : $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$.

3.2 Les théorèmes de Rolle

Théorème 8
*Soient $a \in I$ intervalle de $\mathbb{R}$ avec a **non borne de** I, $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I. Si f admet en a un extremum local alors $f'(a) = 0$.*

Remarque 3.1
1. Le fait que a soit non borne de I est essentiel : prendre comme contre-exemple la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = 1 - x$ et $a = 0$.
2. Il n'y a pas de réciproque à ce théorème : prendre la fonction cube et $a = 0$.
3. En fait, seul la dérivabilité de f à l'intérieur de I importe comme va le montrer la démonstration.

Démonstration. Supposons que f admette en a un maximum local. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que $[a-\alpha, a+\alpha] \subset I$ et tel que $f\,|_{[a-\alpha,a+\alpha]}$ admette en a un maximum. Si $x \in]a, a+\alpha]$ alors $f(x) \leqslant f(a)$ donc :
$$\underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{\underset{x \to a^+}{\longrightarrow} f'(a)} \leqslant 0.$$
Il en résulte que $f'(a) \leqslant 0$. En considérant maintenant x dans $[a-\alpha, a[$, on montre de la même manière que $f'(a) \geqslant 0$. □

Théorème 9 (Rolle)
Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, dérivable, telle que $f(a) = f(b)$. Il existe alors $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. La fonction f est continue sur segment $[a,b]$: elle admet donc son maximum M et un minimum m.
- Si $M = m = 0$ alors f est constante sur $[a,b]$ et $f' = 0$ sur $[a,b]$.
- Sinon, on a $m < M$ et l'un des deux est atteint en un point c dans $]a,b[$. D'après le théorème 8 on a alors $f'(c) = 0$.

□

Remarque 3.2
L'énoncé de ce théorème est encore valable, comme le montre la démonstration, lorsque f est dérivable sur $]a,b[$ et continue sur $[a,b]$.

Exercice 13
Soient $n \geqslant 2$ entier et $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré n, qui admet n racines réelles distinctes. Démontrer que P' admet $n-1$ racines réelles distinctes.

Soient $a_1, \ldots, a_n$ les racines de P rangées dans l'ordre strictement croissant. Fixons i dans $\{1, \ldots, n-1\}$. La fonction polynomiale P est continue sur $[a_i, a_{i+1}]$ et dérivable sur $]a_i, a_{i+1}[$. De plus $P(a_i) = P(a_{i+1})$: le théorème de Rolle s'applique. Il existe $b_i \in]a_i, a_{i+1}[$ tel que $P'(b_i) = 0$. Comme :

$$b_1 < a_2 < b_2 < a_3 < \cdots < a_{n-1} < b_{n-1} < a_n,$$

le polynôme P' admet $n-1$ racines distinctes. □

Exercice 14
Soient α un réel, f dans $\Delta^1(]0, +\infty[, \mathbb{R})$ ayant $n \geqslant 2$ zéros. On considère la fonction $g : x \mapsto \alpha f(x) + f'(x)$. Démontrer que g admet au moins $n-1$ zéros.

On considère la fonction $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \mathrm{e}^{\alpha x} f(x)$. Cette fonction est dérivable sur $]0, +\infty[$ et admet n zéros que l'on classe par ordre croissant : $a_1 < \cdots < a_n$. Fixons i dans $\{1, \ldots, n-1\}$. Comme $g(a_i) = g(a_{i+1}) = 0$, selon le théorème de Rolle, il existe c_i entre a_i et a_{i+1} tel que $g'(c_i) = 0$.
Mais, si $x > 0$, $g'(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}(\alpha f(x) + f'(x))$. □

Exercice 15
Soit f dans $C^3([0, 2], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = f(2) = 0$.

1. Soit λ réel et $g : [0, 2] \to \mathbb{R}$ définie par : $g(t) = f(t) - \dfrac{1}{6} t(t-1)(t-2)\lambda$. Déterminer $g_\lambda^{(3)}(t)$ pour t dans $[0, 2]$.
2. En choisissant λ de manière subtile dans la question précédente, démontrer que pour tout x dans $[0, 2]$ il existe c_x dans $[0, 2]$ tel que :

$$f(x) = \frac{1}{6} x(x-1)(x-2) f^{(3)}(c_x)$$

1. On trouve $g_\lambda^{(3)}(t) = f^{(3)}(t) - \lambda$ pour tout t dans $[0, 2]$.
2. Si $x = 0$, $x = 1$ ou $x = 2$, il n'y a pas de souci.
   Fixons alors x dans $[0, 2]$ différent de 0, 1 et 2.
   On pose $\lambda = \dfrac{6f(x)}{x(x-1)(x-2)}$. On a alors $g_\lambda(x) = 0$.

   Ainsi la fonction g_λ admet 4 zéros distincts au moins.
   Via Rolle, $g_\lambda^{(3)}$ admet au moins un zéro. Il existe donc c_x dans $[0, 2]$ tel que $g_\lambda^{(3)}(c_x) = 0$ i.e $f^{(3)}(c_x) = \lambda$. □

Exercice 16
Soient $a < b$ réels et f dans $\Delta^2([a, b], \mathbb{R})$ telle que $f(a) = f'(a)$ et $f(b) = f'(b)$. Montrer qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que $f''(c) = f(c)$.

On considère la fonction $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \mathrm{e}^x\big(f(x) - f'(x)\big)$. Cette fonction est dérivable sur $[a, b]$ avec $g(a) = g(b)$. Selon le théorème de Rolle il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. Mais on a, pour tout x dans $[a, b]$, $g'(x) = \mathrm{e}^x\big(f(x) - f''(x)\big)\ldots$ □

Exercice 17
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x + 10x^2 \sin \dfrac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

1. Tracer, avec les outils que vous souhaitez (logiciel lambda, imprimante...), le graphe de f au voisinage de 0.
2. Démontrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et préciser la dérivée de f sur $\mathbb{R}^*$.
3. Démontrer que f est dérivable en 0 avec $f'(0) > 0$.
4. Démontrer que f n'est pas croissante au voisinage de 0 i.e. que pour tout $r > 0$, f n'est pas croissante sur l'intervalle $[-r, r]$.
5. La fonction f' est-elle continue en 0 ?

1. Le graphe de f au voisinage de 0 est donné par la figure 1.

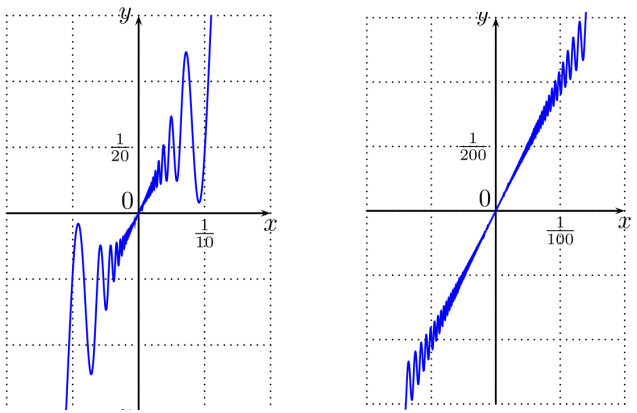


FIGURE 1 – Allure du graphe de f

2. La fonction f est C^∞ sur $]0,+\infty[$ et $]-\infty,0[$ comme somme de fonctions C^∞ sur ces intervalles. Si x est non nul on a :
$$f'(x) = 1 - 10\cos\frac{1}{x} + 20x\sin\frac{1}{x}.$$

3. Pour $x > 0$ on a :
$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{x + 10x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = 1 + 10x\sin\frac{1}{x}$$
Mais pour tout $x \neq 0$ on a : $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leqslant 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$ (produit d'une fonction bornée par une fonction tendant vers 0). Ainsi :
$$\exists \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = 1 \in \mathbb{R}.$$

4. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ posons $x_n = \dfrac{1}{2n\pi}$. On a $x_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $f'(x_n) = -9$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Raisonnons alors par l'absurde et supposons que f soit strictement croissante sur un voisinage de 0. Il existe alors $r > 0$ tel que sur $[-r,r]$ la fonction f soit croissante et ainsi $f'(x) \geqslant 0$ pour tout x dans $[-r,r]$. Comme $x_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe N entier tel que $x_N \in [-r,r]$ et on a $f'(x_N) = -9$ ce qui amène une contradiction.

5. Si f' est continue en 0, comme $f'(0) = 1$, il existe alors un voisinage de 0 sur lequel $f' > 0$: elle ne peut être continue en 0. On peut aussi utiliser la question précédente, qui montre que f n'est pas continue séquentiellement en 0 puisque $x_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ mais $f(x_n) = -9 \neq f'(0)$.

3.3 Le théorème des accroissements finies

Théorème 10 (Accroissements finis ponctués)
Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui est dérivable sur $]a,b[$. Il existe alors c entre a et b tel que :
$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

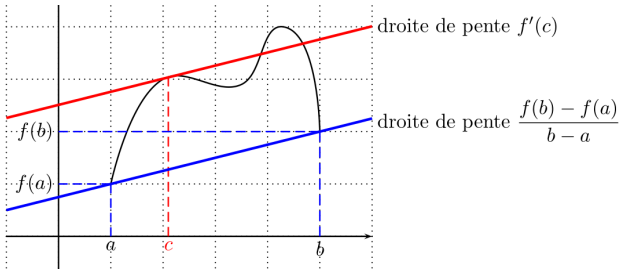


FIGURE 2 – Illustration des accroissements finis

Remarque 3.3
1. Dans la pratique f est dérivable sur $[a,b]$.
2. Ce théorème dit qu'il existe un point de la courbe (au moins) où la tangente (dont l'existence est assurée par le caractère dérivable de f) est parallèle à la droite passant par les points $\big(a, f(a)\big)$ et $\big(b, f(b)\big)$.
3. Si de plus la dérivée de f est bornée par un réel M sur $]a,b[$, on obtient ***l'inégalité des accroissements finis*** :
$$|f(a) - f(b)| \leqslant M\,|b-a|\,.$$

Démonstration. Considérons la fonction $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie, pour $x \in [a,b]$, par :
$$\varphi(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(x) + f(a).$$
Cette fonction est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et vérifie : $\varphi(a) = \varphi(b)$. Selon le théorème de Rolle, il existe c dans $]a,b[$ tel que : $\varphi'(c) = 0$.

Comme pour tout x dans $]a,b[$ on a $\varphi'(x) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'(x)$, le théorème des accroissements finis est prouvé. □

Exercice 18 (Théorème de Darboux)
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable.

1. Soient $\alpha \leqslant \beta$ dans $f'(I)$, $\lambda \in [\alpha,\beta]$ ainsi que a et b dans I tels que $f'(a) = \alpha$ et $f'(b) = \beta$. On suppose que $a < b$. On considère les fonctions :
$$\varphi = \begin{pmatrix}]a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{pmatrix} \text{ et } \psi = \begin{pmatrix} [a,b[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(b)-f(x)}{b-x} \end{pmatrix}.$$
Démontrer que l'on a : $\lambda \in \operatorname{Im}\varphi$ ou $\lambda \in \operatorname{Im}\psi$.
2. Démontrer que $f'(I)$ est un intervalle.

• **Première méthode.** Soit $\alpha \leqslant \beta$ dans $f'(I)$ et $\lambda \in [\alpha,\beta]$. Il existe a et b dans I tels que $f'(a) = \alpha$ et $f'(b) = \beta$. On suppose par exemple que $a < b$ et on considère les fonctions :
$$\varphi = \begin{pmatrix}]a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{pmatrix} \text{ et } \psi = \begin{pmatrix} [a,b[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(b)-f(x)}{b-x} \end{pmatrix}.$$
La fonction φ est prolongeable par continuité en a en posant $\varphi(a) = f'(a)$. De même la fonction ψ est prolongeable par continuité en b en posant $\psi(b) = f'(b)$.
Ainsi $\varphi([a,b])$ et $\psi([a,b])$ sont des intervalles, avec un point un commun qui est $\varphi(b) = \psi(a)$: leur union est un intervalle J. Comme J contient α et β, il contient ainsi λ. Il en résulte que $\lambda \in \operatorname{Im}\varphi$ ou $\lambda \in \operatorname{Im}\psi$.
Si par exemple $\lambda \in \operatorname{Im}\varphi$ alors il existe $x \in [a,b]$ tel que $\varphi(x) = \lambda$. Mais le théorème des accroissements finis ponctués assure l'existence de c entre a et x tel que $f'(c) = \varphi(x) = \lambda : \lambda \in \operatorname{Im} f'$. □

• **Seconde méthode. « Le coup du triangle ».** On considère :
$$T = \left\{(x,y) \in I^2 \mid x < y\right\}.$$
Soit $\varphi : T \to \mathbb{R}$ définie par : $\varphi(x,y) = \dfrac{f(y)-f(x)}{x-y}$. Comme T est un connexe de $\mathbb{R}^2$ et comme φ est continue, $\varphi(T)$ est un connexe de $\mathbb{R}$, donc un intervalle J de $\mathbb{R}$.

D'après le théorème des accroissements finis ponctués, on a $J \subset f'(I)$. Par définition de la dérivée, $f'(I) \subset \overline{J}$. Comme $\overline{J}$ ne diffère éventuellement de J que par ses extrémités, $f'(I)$ est un intervalle.

4 Les formules de Taylor

4.1 Les formules globales

4.1.1 La formule de Taylor-Lagrange

Théorème 11 (Taylor-Lagrange)
Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$, n entier, f dans $C^n([a,b],\mathbb{R})$ avec f Δ^{n+1} sur $]a,b[$. Il existe alors c dans $]a,b[$ tel que :
$$\boxed{f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)}$$

Remarque 4.1
1. Pour $a = 0$, il s'agit de la formule de Taylor-MacLaurin.
2. L'ordre de a et b n'a à posteriori pas d'importance.
3. Par exemple, pour $n = 2$ on a donc l'existence de c entre a et b tel que :
$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(a) + \frac{(b-a)^3}{6} f^{(3)}(c)$$
4. Bien comprendre que c dépend de n de a et de b.
5. **Inégalité de Taylor-Lagrange**
Lorsque $f^{(n+1)}$ est bornée par M sur $]a,b[$ on a alors l'inégalité de Taylor-Lagrange *:*
$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} M$$

Démonstration. Soit A le réel tel que : $f(b) - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) = \dfrac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} A$.
On considère la fonction auxiliaire φ, définie sur $[a,b]$, par :
$$\varphi(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} A.$$

Cette fonction est continue sur $[a,b]$ et $\varphi(a)=\varphi(b)=0$. De plus φ est dérivable sur $]a,b[$, et si $x\in]a,b[$, on a :

$$\varphi'(x)=-\frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x)+\frac{(b-x)^n}{n!}\,A=\frac{(b-x)^n}{n!}\left[A-f^{(n+1)}(x)\right].$$

Le théorème de Rolle (théorème 9) affirme alors l'existence de c dans $]a,b[$ tel que $\varphi'(c)=0$ ce qui prouve la formule. □

4.1.2 La formule de Taylor-Intégrale

Théorème 12 (Taylor-Intégrale)
Soient $a<b$ dans $\mathbb{R}$ et f dans $C^{n+1}([a,b],\mathbb{R})$. On a alors :

$$\boxed{f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\int_a^b\frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt}$$

Remarque 4.2

1. Cela généralise le résultat bien connu : $f(b)-f(a)=\displaystyle\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Pour $n=1$ cela donne : $f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\displaystyle\int_a^b(b-t)f''(t)\,\mathrm{d}t$
3. On utilise souvent la formule de Taylor-Intégrale en se ramenant par changement de variable affine à une fonction f définie sur $[0,1]$, ce qui donne à l'ordre 1 :
$$f(1)=f(0)+f'(0)+\int_0^1(1-t)f''(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. On considère la fonction auxiliaire $\psi:[a,b]\to\mathbb{R}$ définie par : $\psi(x)=f(b)-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)$.
La fonction ψ est C^1 sur $[a,b]$. Pour x dans $[a,b]$ on a : $\psi'(x)=-\dfrac{(b-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x)$.
On écrit alors $\psi(b)-\psi(a)=\displaystyle\int_a^b\psi'(x)\,\mathrm{d}x$ ce qui donne immédiatement le résultat. □

Exercice 19
Démontrer que les fonctions polynômes de degré $\leqslant n$ sur un intervalle I non réduit à un point sont exactement les fonctions $f:I\to\mathbb{R}$ de classe C^{n+1} telles que $f^{n+1}=0$ sur cet intervalle.

> Il y a une équivalence à montrer. Il est immédiat de voir que si f est une fonction polynôme de degré $\leqslant n$ sur I alors $f^{n+1}=0$ sur I. Pour la réciproque, on prend une fonction $f:I\to\mathbb{R}$ de classe C^{n+1} telles que $f^{n+1}=0$ sur I et on écrit la formule de Taylor-Lagrange entre x et a où x et a sont dans I pour obtenir le résultat.

4.2 La formule locale

Théorème 13 (Taylor-Young)
Soient $a\in I$ intervalle, $n\in\mathbb{N}^*$, f dans $\Delta_a^n(I,\mathbb{R})$. Il existe alors une fonction ε définie au voisinage de a telle que $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x)=0$ et, pour x proche de a,

$$\boxed{f(x)\underset{x\to a}{=}\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\mathrm{o}(x-a)^n}.$$

Cette égalité s'appelle la formule de Taylor-Young à l'ordre n en a.

Démonstration. On fait une récurrence sur $n\geqslant 1$ pour démontrer la propriété suivante :
Dès que I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $a\in I$, $f\in\Delta_a^n(I,\mathbb{R})$ il existe une fonction ε définie au voisinage de a telle que $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x)=0$ et, pour x proche de a,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+(x-a)^n\varepsilon(x).$$

— Si $n=1$, c'est l'identité de la dérivée.
— On suppose que le résultat est valable pour un certain $n\geqslant 1$ entier. Soient I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $a\in I$ et $f\in\Delta_a^{n+1}(I,\mathbb{R})$. La fonction $g=f'$ est dans $\Delta_a^n(I,\mathbb{R})$: on peut lui appliquer l'hypothèse. Il existe ainsi $\varepsilon:I\to\mathbb{R}$ nulle et continue en a telle que :

$$\begin{aligned}g(x)&=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}g^{(k)}(a)+(x-a)^n\varepsilon(x)\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k+1)}(a)+\underbrace{(x-a)^n\varepsilon(x)}_{=u(x)}.\end{aligned}$$

Pour x proche de a, on pose $U(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$.

On a : $U'(x) = u(x)$ et $U(a) = 0$. Puis, soit $\delta > 0$. Comme ε est nulle et continue en a, il existe $\gamma > 0$ tel que $|\varepsilon(x)| \leqslant \delta$ dès que $|x-a| \leqslant \gamma$. Ainsi :

$$|U'(x)| \leqslant \delta(x-a)^n \quad \text{si } |x-a| \leqslant \delta.$$

Si, par exemple, on a $a \leqslant x \leqslant a+\gamma$, il vient en intégrant entre a et x :

$$|U(x) - U(a)| \leqslant \frac{\delta(x-a)^{n+1}}{n+1}.$$

Dans tous les cas on obtient : $|U(x) - U(a)| \leqslant \dfrac{\delta\,|x-a|^{n+1}}{n+1}$.

On pose alors $\zeta(x) = \dfrac{U(x)}{(x-a)^{n+1}}$ si $x \neq a$ et $\zeta(a) = 0$. Ce qui précède assure que ζ est continue en a. Ainsi la propriété est varie au rang $n+1$.

Autre preuve. Pour $n \geqslant 0$ on pose, pour x dans I distinct de a :

$$R_n(x) = \frac{\overbrace{f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)}^{=\varphi(x)}}{\underbrace{(x-a)^n}_{=\psi(x)}}.$$

On veut démontrer que $\lim\limits_{x\to a} R_n(x) = 0$ ce que l'on obtient par applications successives de la règle de l'hôpital, puisque : $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\varphi^{(n)}(x)}{\psi^{(n)}(x)} = 0$. □

Remarque 4.3

1. Pour $n = 1$ on retrouve l'identité de la dérivée.
2. L'hypothèse f dans $\Delta_a^n(I, \mathbb{R})$ signifie en fait : f dérivable au voisinage de a, f' dérivable au voisinage de a,..., $f^{(n-2)}$ dérivable au voisinage de a et $f^{(n-1)}$ dérivable en a.
3. Pour la preuve, on procède ici par récurrence.
4. Si on peut écrire la formule à l'ordre n de Taylor-Young pour une fonction f en a alors f admet, en a, un développement limité à l'ordre n (avec réciproque uniquement lorsque $n = 1$). Ainsi :

> Une fonction C^∞ sur un intervalle I
> admet en tout point de I un développement limité à l'ordre n,
> pour tout $n \geqslant 1$ entier.

5. Bien noter la différence sur les hypothèses pour les différentes formules de Taylor.

> Il y a **deux groupes** dans les formules de Taylor :
>
> **TL/TI** → hypothèse **globale** de dérivabilité : Δ^{n+1}, C^{n+1}.
> **TY** → hypothèse **ponctuelle** de dérivabilité : Δ_a^n.
>
> Il est (en général) **STUPIDE** d'utiliser TY
> avec une hypothèse globale de dérivabilité.

Exercice 20
Soit f dans $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec f et f'' bornées par M_0 et M_2 respectivement.
En utilisant une formule de Taylor adéquate entre x et $x+1$ (x réel), montrer que f' est bornée par un réel M_1 avec : $M_1 \leqslant 2M_0 + \frac{1}{2}M_2$.

Soit x réel. On écrit la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 entre x et $x+1$. Il existe c_x entre x et $x+1$ tel que :

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{1}{2} f''(c_x).$$

Ainsi il vient :

$$\begin{aligned} |f'(x)| &\leqslant \underbrace{|f(x+1)|}_{\leqslant M_0} + \underbrace{|f(x)|}_{\leqslant M_0} + \frac{1}{2}\underbrace{|f''(c_x)|}_{\leqslant M_2} \\ &\leqslant 2M_0 + \frac{1}{2}\, M_2 \end{aligned}$$

Ceci étant valable pour tout x réel, on peut conclure que f' est bornée par un réel M_1 avec : $M_1 \leqslant 2M_0 + \frac{1}{2}\, M_2$

Exercice 21
Soit $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que f et f'' admettent des limites réelles en $+\infty$ que l'on note ℓ_0 et ℓ_2. Le but de l'exercice est de montrer que $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \ell_2 = 0$.

1. En écrivant la formule de Taylor-Intégrale à l'ordre 1 entre x et $x+1$, montrer que $\exists \lim_{x\to+\infty} f'(x) = -\dfrac{\ell_2}{2}$.
2. Démontrer que $\ell_2 = 0$.

   1. Soit x réel. On écrit la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 entre x et $x+1$. Il existe c_x entre x et $x+1$ tel que :

   $$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{1}{2}f''(c_x).$$

   On a donc : $f'(x) = f(x+1) - f(x) - \dfrac{1}{2}f''(c_x)$.
   Mais $c_x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc, par composition des limites

   $$f''(c_x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2.$$

   Il vient donc :

   $$f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_0 - \ell_0 - \frac{1}{2}\,\ell_2 = -\frac{1}{2}\,\ell_2.$$

   2. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\ell_2 \neq 0$. Quitte à changer f et $-f$, on peut supposer que $\ell_2 > 0$.
   Il existe alors $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \geqslant A$ on ait :

   $$|f''(t) - \ell_2| \leqslant \frac{\ell_2}{2},$$

   et ainsi $f''(t) \geqslant \dfrac{\ell_2}{2}$, valable pour tout $t \geqslant A$.
   Pour tout $x \geqslant A$ on a donc $\displaystyle\int_A^x f''(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{\ell_2}{2}(x-A)$ i.e.

   $$f'(x) \geqslant \frac{\ell_2}{2}(x-A) + f'(A) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

   ce qui contredit la question précédente.

Exercice 22
Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$. A l'aide d'une formule de Taylor, déterminer limite de la suite (S_n).

Soit $n \in \mathbb{N}$. En écrivant par exemple la formule de Taylor-Lagrange entre 0 et 1 pour $f : x \mapsto \ln(1+x)$ on obtient l'existence de c_n entre 0 et 1 tel que :

$$\ln 2 = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}.$$

Une petite récurrence donne sans difficulté pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $x > -1$:

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x)^k}$$

pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $x > -1$. Cela amène : $f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1}(k-1)!$.
Enfin $f^{(n+1)}$ est bornée par $n!$ sur $[0,1]$ d'où $\dfrac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 23
Soit f dans $\Delta^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$ avec f'' majorée par $M \geqslant 0$ réel. Démontrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a : $0 < f(x) + yf'(x) + \dfrac{y^2}{2}M$ et en déduire que $\left|(\sqrt{f})'\right| \leqslant \sqrt{\frac{M}{2}}$.

Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On écrit la formule de Taylor-Lagrange entre x et $x+y$: il existe $c_{x,y}$ entre x et $x+y$ tel que :

$$f(x+y) = f(x) + yf'(x) + \frac{y^2}{2}f''(c_{x,y}).$$

Comme f est à valeurs strictement positives, il vient :

$$0 < f(x) + yf'(x) + \frac{y^2}{2}\,M.$$

Le trinôme en y ci-dessus a donc un discriminant strictement négatif :

$$f'^2(x) - 2Mf(x) < 0, \quad \text{donc} \quad \frac{f'^2(x)}{4f(x)} < \frac{M}{2},$$

ce qui donne le résultat.

Exercice 24 (Théorème de division dans $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$)
Soit f dans $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f(0)=0$.
Démontrer que la fonction $g = \begin{pmatrix} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{f(x)}{x} \end{pmatrix}$ admet un prolongement C^∞ à $\mathbb{R}$ avec pour tout n entier : $g^{(n)}(0) = \dfrac{1}{n+1} f^{(n+1)}(0)$.

• **Un cas particulier.** Supposons un instant que f est une fonction entière (i.e. la somme d'une série entière de rayon de convergence infini). On dispose alors d'une suite (a_n) dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout x réel on ait :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{avec pour tout } n \in \mathbb{N} : a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Comme $f(0)=0$, il vient $a_0 = 0$ de sorte que pour tout x réel on a :

$$f(x) = x \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{n-1}}_{=g(x)}.$$

Comme g est une fonction entière, elle est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et :

$$g^{(n)}(0) = a_{n+1} n! = \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}.$$

Hélas, il existe des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$ qui ne sont pas développable en série entière au voisinage de 0.

• **Première méthode.** Pour tout x non nul on a :

$$f(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \underbrace{=}_{t=xu} x \int_0^1 f'(xu)\,\mathrm{d}u.$$

Pour tout x non nul, on a donc $g(x) = \displaystyle\int_0^1 f'(xu)\,\mathrm{d}u$. Pour $x=0$ on pose $g(0) = f'(0)$, de sorte que $g(x) = \displaystyle\int_0^1 f'(xu)\,\mathrm{d}u$ pour tout x réel.
On utilise alors de façon répété le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (vérifier les hypothèses !) :

— La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout x réel :

$$g'(x) = \int_0^1 u f''(xu)\,\mathrm{d}u \quad \text{et ainsi} \quad g'(0) = \frac{f''(0)}{2}.$$

— La fonction g' est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout x réel :

$$g''(x) = \int_0^1 u^2 f^{(3)}(xu)\,\mathrm{d}u \quad \text{et ainsi} \quad g''(0) = \frac{f^{(3)}(0)}{3}$$

— etc...

• **Seconde méthode.**
La fonction g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de telles fonctions. Pour tout x non nul on a $f(x) = xg(x)$ et pour $n \geqslant 1$ entier il vient :

$$f^{(n)}(x) = xg^{(n)}(x) + ng^{(n-1)}(x).$$

Puis si x est non nul, $n \in \mathbb{N}$, l'égalité de Taylor-Lagrange entre x et 0 fournit $c_{n,x}$ entre 0 et x tel que :

$$0 = f(0) = f(x) - xf'(x) + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(x) + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_{n,x}).$$

Ainsi :

$$0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!} \left(xg^{(k)}(x) + kg^{(k-1)}(x) \right) + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_{n,x})$$

Il reste $g^{(n)}(x) = \dfrac{1}{n+1} f^{(n+1)}(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{n+1} f^{(n+1)}(0)$.
Un emploi itéré du théorème de prolongement de la dérivée permet de conclure.

Exercice 25
Il s'agit d'un énoncé plus général de celui de l'exercice 20.
Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^n ($n \geqslant 2$ entier) telle que f et $f^{(n)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$. Démontrer que pour tout k dans $\{1,\ldots,n-1\}$ la fonction $f^{(k)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Soit x réel. Pour $i \in \{0, \dots, n-1\}$ on pose $a_i = i+1$. On écrit alors la formule de Taylor-Lagrange pour f à l'ordre $n-1$ entre x et $x+a_i$ (loisible car f est de classe C^n). Il existe c_i entre x et $x+a_i$ tel que :

$$f(a_i) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} a_i^k + \frac{f^{(n)}(c_i)}{k!} a_i^n.$$

Cela se traduit matriciellement par $Y = AX + B$ où :

$$Y = \begin{pmatrix} f(a_0) \\ \vdots \\ f(a_n) \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} a_0^0 & a_0^1 & \cdots & a_0^{n-1} \\ a_1^0 & a_1^1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1}^0 & a_{n-1}^1 & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{f^{(0)}(x)}{0!} \\ \vdots \\ \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{a_0^n}{n!} f^{(n)}(c_0) \\ \vdots \\ \frac{a_{n-1}^n}{(n)!} f^{(n)}(c_{n-1}) \end{pmatrix}$$

Comme les a_i sont distincts, la matrice A est inversible, donc $X = A^{-1}(Y - B)$ et ainsi, pour tout k dans $\{1, \dots, n-1\}$, $f^{(k)}$ s'écrit comme combinaison linéaire de fonctions bornées.