Digest sur les suites réelles ou complexes

PC, Lycée Joffre

14 juillet 2026

Sommaire

1 Convergence **1**
1.1 Définitions . . . 1
1.2 Premières propriétés . . . 2
1.3 Limites et inégalités . . . 2
1.4 Le théorème de la limite monotone dans $\mathbb{R}$ . . . 2
1.5 Le théorème des suites adjacentes . . . 2

2 Limite infinie d'une suite réelle **3**
2.1 Définition . . . 3
2.2 Limites et inégalités . . . 3
2.3 Le théorème de la limite monotone . . . 3

3 Notions rudimentaires sur les suites extraites **3**

4 Caractérisation séquentielle de certains phénomènes **3**

5 Suites particulières **4**
5.1 Quelques sommes . . . 4
5.2 Suites arithmético-géométriques. . . . 4
5.3 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2. . . . 4

6 Relations de comparaison pour les suites **5**
6.1 Définitions . . . 5
6.2 Des exemples à connaître . . . 5
6.3 Propriétés . . . 5
6.4 Opérations sur les équivalents . . . 5
6.5 Croissances comparées . . . 6

1 Convergence

1.1 Définitions

NB : les suites considérées sont des suites réelles ou complexes. $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

• Une suite dans $\mathbb{K}$ est une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$. On note en général, pour $n \in \mathbb{N}$, u_n à la place de $u(n)$.

• Une suite réelle u est **majorée** lorsqu'il existe un réel M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $u_n \leqslant M$.
Une suite dans $\mathbb{K}$ est **bornée** lorsqu'il existe un réel M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $|u_n| \leqslant M$.
• **Monotonie**. Une suite réelle u est strictement croissante lorsque, **pour tout** $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n < u_{n+1}$. On a de même la notion de suite croissante (remplacer $<$ par $\leqslant$), de suite décroissante et de suite strictement décroissante.
Une suite est **monotone** lorsqu'elle croissante ou décroissante.

• Une suite u dans $\mathbb{K}$ converge vers $\ell \in \mathbb{K}$ lorsque :

$$\boxed{(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N})\,(\forall n \geqslant N_\varepsilon)\,(|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon)}.$$

On écrit alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou $u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

— Cela signifie que pour tout $\varepsilon > 0$ donné tous les termes de la suite u se trouve, à partir d'un certain rang dépendant du choix de ε, dans le disque de centre ℓ et de rayon ε (dans le cas complexe) ou dans un intervalle de centre ℓ et de rayon ε (dans le cas réel).

— Le nombre ε quantifie la distance entre ℓ et les termes de la suite : a priori il est petit.
— Noter que, d'après l'ordre des quantificateurs, N_ε dépend du choix de ε. A priori plus ε est petit, plus N_ε est grand

• Un suite réelle ou complexe est convergente lorsque :

$$(\exists \ell \in \mathbb{K})\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N})\,(\forall n \geqslant N_\varepsilon)\,(|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon)$$

1.2 Premières propriétés

Théorème 1
Lorsque u est une suite dans $\mathbb{K}$, la suite u converge vers 0 si et seulement si la suite $|u|$ converge vers 0.

Théorème 2 (Unicité de la limite)
Si u est une suite dans $\mathbb{K}$ qui converge vers ℓ et λ alors $\ell = \lambda$.

Théorème 3
Toute suite convergente dans $\mathbb{K}$ est bornée.

Remarque 1.1
Il n'y a pas de réciproque (considérer $u_n = (-1)^n$).

1.3 Limites et inégalités

On parle ici de suites dans $\mathbb{R}$.

Théorème 4 (Passage à la limite dans une inégalité)
Soient u et v des suites qui convergent respectivement vers $\ell \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si, pour tout n à partir d'un certain rang, on a $u_n < v_n$ alors $\ell \leqslant \lambda$.

Remarque.

• On retient que l'**on ne garde pas l'inégalité stricte par passage à la limite**.

• Bien noter que les suites u et v sont convergentes par hypothèses.

Théorème 5 (Le théorème du Sandwich)
Soient u, v et w des suites réelles. On suppose que :

- *Les suite u et w convergent vers le même réel ℓ ;*
- *Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$, on ait $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.*

Alors la suite v converge vers ℓ.

Remarque 1.2
Ce théorème est à la fois qualitatif et quantitatif. La conclusion est double : il permet d'assurer l'existence d'une limite et de quantifier cette limite.

Corollaire 5.1

1. *Le produit d'une suite de limite nulle par une suite bornée converge vers 0.*
2. *Tout réel est limite d'une suite de rationnels.*

1.4 Le théorème de la limite monotone dans $\mathbb{R}$

Théorème 6

1. *Toute suite réelle croissante et majorée converge.*
2. *Toute suite réelle décroissante et minorée converge.*

Remarque 1.3
C'est un résultat qualitatif : il ne permet pas de déterminer la limite. Ce résultat sert à assurer l'existence de la limite d'une suite, mais pour déterminer cette limite, il faudra utiliser un autre théorème.

1.5 Le théorème des suites adjacentes

On travaille ici avec des **suites réelles**.

Définition 1 *Deux suites réelles sont adjacentes lorsque :*

— *l'une est décroissante ;*
— *l'autre est croissante ;*
— *la limite de la différence des deux suites est nulle.*

Théorème 7 (Théorème des suites adjacentes)
Deux suites adjacentes u et v convergent vers le même réel ℓ. Ce réel est l'unique réel tel que, pour tout n entier naturel, on ait $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$.

EXEMPLE. Les suites $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$ sont adjacentes et convergent vers e.

2 Limite infinie d'une suite réelle

2.1 Définition

Une suite réelle tends vers $+\infty$ et on écrit $u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ lorsque :

$$\boxed{(\forall A > 0)\,(\exists N_A \in \mathbb{N})\,(\forall n \geqslant N_\varepsilon)\,(u_n \geqslant A)}$$

Dans cette définition, le réel A est moralement grand et l'entier N_A dépend du choix de A. De même on a la notion de suites qui admettent $-\infty$ pour limite. Ces suites sont dites *divergentes de première espèce.*

2.2 Limites et inégalités

Théorème 8
Si $u_n \leqslant v_n$ pour tout n à partir d'un certain rang et si $u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors $\exists \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Remarque 2.1
Penser à toutes les variantes possibles du résultat ci-dessus.

2.3 Le théorème de la limite monotone

Théorème 9
Toute suite réelle croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.

Remarque 2.2
Il y a bien sur un énoncé analogue pour une suite décroissante et non minorée.

3 Notions rudimentaires sur les suites extraites

Définition 2 *Une extraction est une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante. Lorsque u est une suite dans K on dit que v est une suite extraite de u lorsqu'il existe φ extraction telle que pour tout n dans $\mathbb{N}$ on ait $v_n = u_{\varphi(n)}$.*

Théorème 10
Lorsque u, suite dans $\mathbb{K}$, admet une limite en $+\infty$, toute suite extraite de u admet la même limite.

Remarque 3.1

1. Si $u_n \to \ell$ alors pour tout q entier la suite définie par $v_n = u_{n+q}$ converge vers ℓ : on ne change pas le comportement asymptotique de la suite en y enlevant ses premiers termes.
2. **Deux par deux** : $u_n \to \ell$ si et seulement si ($u_{2n} \to \ell$ et $u_{2n+1} \to \ell$) (pour u suite dans $\mathbb{K}$).

4 Caractérisation séquentielle de certains phénomènes

Théorème 11 (Caractérisation séquentielle de la limite)
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

(1) $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.
(2) *Pour toute suite (u_n) dans I telle que $u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} a$ on a $f(u_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$.*

Démonstration. • (1) $\Rightarrow$ (2) est le théorème de composition des limites.

• (2) $\Rightarrow$ (1) Par l'absurde. On suppose a réel (adapter si $a = +\infty\ldots$). On suppose donc :

$$(\exists \varepsilon > 0)\,(\forall \alpha > 0)\,(\exists x \in I)\,(|x - a| \leqslant \alpha \text{ et } |f(x) - \ell| > \varepsilon)$$

En prenant, à n fixé dans $\mathbb{N}$, $\alpha = 2^{-n}$, on donc l'existence de x_n dans I tel que $|x_n - a| \leqslant 2^{-n}$ et $|f(x_n) - \ell| > \varepsilon$. Cela nous fournit donc une

suite (x_n) dans I telle que $x_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} a$ et $f(x_n)$ ne converge pas vers ℓ : c'est absurde. □

Théorème 12 (Caractérisation séquentielle de la continuité)
Soient $a \in I$ intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$. Alors f est continue en a si et seulement si pour toute suite (x_n) dans I telle que $x_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} a$ on a $f(x_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} f(a)$.

Corollaire 12.1
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ continue qui vérifie $f(I) \subset I$ et (u_n) une suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Si la suite (u_n) converge vers $\ell \in I$ alors $f(\ell) = \ell$.

Théorème 13 (Caractérisation séquentielle de la borne inférieure)
Soit A une partie minorée et non vide de $\mathbb{R}$. Démontrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(1) $m = \inf A$
(2) *m minore A et il existe une suite (u_n) dans A telle que $u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} m$.*

Démonstration. Comme A est minorée et non vide, $\inf A$ existe bien dans $\mathbb{R}$ (axiome de la borne inférieure).

• (1) $\Rightarrow$ (2). On suppose $m = \inf A$. Ainsi m minore A. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $a \in A$ tel que $a - m \leqslant \varepsilon$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $x_n \in A$ tel que $0 \leqslant x_n - m \leqslant 2^{-n}$ et par sandwich on a $x_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} a$.

• Réciproque bla^2. □

5 Suites particulières

5.1 Quelques sommes

$$\Sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},\ \Sigma_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ et } \Sigma_3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \Sigma_1^2$$

5.2 Suites arithmético-géométriques.

Il s'agit des suites de la forme $u_{n+1} = au_n + b$ où a et b sont des complexes ($a \neq 1$). Si α est la solution de l'équation $x = ax + b$ alors $v_n = u_n - \alpha$ est une suite géométrique de raison a ce qui permet de déterminer u_n pour tout n entier. En effet pour n entier naturel :

$$v_{n+1} = v_{n+1} - \alpha = au_n + b - (a\alpha + b) = \alpha(u_n - \alpha) = \alpha v_n$$

5.3 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

On considère ici les suites (u_n) dans $\mathbb{K}$ définie, pour n entier naturel, par la relation de récurrence

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \quad (\clubsuit)$$

où a et b sont dans $\mathbb{K}$.
Ces suites forment un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension 2. Pour déterminer ces suites on considère l'équation caractéristique :

$$(EC) \quad X^2 - aX - b = 0$$

— Lorsque (EC) a deux racines **distinctes** r_1 et r_2 dans $\mathbb{K}$ alors les suites dans $\mathbb{K}$ qui vérifient $(\clubsuit)$ sont exactement celles de la la forme

$$n \mapsto \alpha r_1^n + \beta r_2^n \text{ où } (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$$

— Lorsque (EC) a une racine **double** r dans $\mathbb{K}$ alors les suites dans $\mathbb{K}$ qui vérifient $(\clubsuit)$ sont exactement celles de la la forme

$$n \mapsto (\alpha n + \beta) r^n \text{ où } (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$$

— Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on a un cas supplémentaire. Lorsque (EC) n'a pas de solution réelle, elle admet deux solutions complexes conjuguées $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$ et alors les suites dans $\mathbb{R}$ qui vérifient (♣) sont exactement celles de la la forme

$$n \mapsto \rho^n(\alpha \cos n\theta + \beta \sin n\theta) \quad \text{où } (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$$

6 Relations de comparaison pour les suites

6.1 Définitions

Définition 3 *Les suites considérées sont des suites réelles ou complexes. Soient u_n et v_n deux suites complexes.*

1. *On dit que u_n est négligeable devant v_n et on écrit $u_n \underset{+\infty}{\ll} v_n$ ou $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$ lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = v_n \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n \to 0$.*
2. *On dit que u_n est équivalente à v_n et on écrit : $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = v_n(1 + \varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_n \to 0$.*
3. *On dit que u_n est dominée par v_n et on écrit $u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n)$ lorsque lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|u_n| \leqslant M |v_n|$.*

Remarque 6.1

1. Lorsque la suite v_n ne s'annule pas on a :
   — $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n) \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \to 0$
   — $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \to 1$
   — $u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n) \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n}$ bornée
2. Ne pas écrire $u_n \sim 0$. En effet cela signifie $u_n = 0$ à partir d'un certain rang.

6.2 Des exemples à connaître

• Si $u_n \to 0$ alors :
   — $\ln(1 + u_n) \sim u_n$
   — $\sin(u_n) \sim u_n$
   — $e^{u_n} - 1 \sim u_n$
   — $\tan(u_n) \sim u_n$

Ces exemples sont basés sur le fait suivant : si f est une fonction dérivable en 0 alors **l'identité de la dérivée** donne

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + x\varepsilon(x) \quad \text{où } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

• La formule de Stirling (admise pour l'instant) : $\boxed{n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}}$.

6.3 Propriétés

Théorème 14

— *Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n \sim w_n$.*
— ***Une caractérisation importante** : $u_n \sim v_n$ si et seulement si $u_n - v_n = o(v_n)$.*
— *Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n + v_n \sim v_n$.*
— *Si $u_n \sim v_n$ et $u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$ alors $v_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$.*
— *Si $\ell \in \mathbb{C}^*$, $u_n \to \ell \Leftrightarrow u_n \sim \ell$*
— *$u_n \to 0 \Leftrightarrow u_n = o(1)$*
— *(u_n) bornée $\Leftrightarrow u_n = O(1)$*

6.4 Opérations sur les équivalents

• Produit/inverse et quotient : tout se passe bien. Par exemple $\frac{P(n)}{Q(n)} \sim$ quotient des termes de plus haut degré.
• On ne peut pas en général sommer des équivalents. **Un principe : ne pas écrire $u_n \sim$ somme dont les termes ont des ordres de grandeur différents**. Par exemple écrire $u_n \sim \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}$ est débile puisque l'on a aussi $u_n \sim \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{100}{n^3}$; on écrit plutôt :

$$u_n \sim \frac{1}{n}$$

Prendre un équivalent, c'est travailler au premier ordre.

• **Equivalents et exponentielles**. Cela ne marche pas en général. $u_n \sim v_n \Rightarrow \mathrm{e}^{u_n} \sim \mathrm{e}^{v_n}$ est FAUX. Le bon énoncé est :

$$u_n - v_n \to 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{u_n} \sim \mathrm{e}^{v_n}$$

• **Equivalents et logarithmes** : $u_n \sim v_n \Rightarrow \ln u_n \sim \ln v_n$ est FAUX en général.

• **TECHNIQUE** : pour éviter ces écueils, on peut remplacer les équivalents par des égalités en revenant à la définition.

• Par « *comparaison série/intégrale* » on peut montrer que $H_n \sim \ln n$ où $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$.

6.5 Croissances comparées

Théorème 15
On a pour $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $a > 1$:

$$\boxed{(\ln n)^\alpha \underset{+\infty}{\ll} n^\beta \underset{+\infty}{\ll} a^n \underset{+\infty}{\ll} n! \underset{+\infty}{\ll} n^n}$$

La preuve de ce résultat utilise par exemple le lemme suivant, intéressant à démontrer en soit, et qui peut servir pour les séries :

Lemme. *Pour deux suites strictement positives, si à partir d'un certain rang on a :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n} \quad \textit{alors} \quad u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n)$$

S'entraîner sur la preuve de $n^\beta \underset{+\infty}{\ll} a^n$.