Résumé sur les équations différentielles

Sommaire

1 Équation différentielle linéaire du premier ordre **1**
1.1 Résolution de l'équation linéaire homogène associée 1
1.2 Résolution finale 2
1.3 Recherche d'une solution particulière 2
1.4 La condition initiale 2
1.5 Compléments 2

2 Équation différentielle linéaire à coefficients constants du second ordre **3**
2.1 Résolution de l'équation homogène associée. 3
2.2 Trouver une solution particulière de l'équation complète. . . . 3
2.3 La condition initiale 4
2.4 Complément 4

3 Exercices **4**

1 Équation différentielle linéaire du premier ordre

On s'intéresse ici à l'équation différentielle

$$(E)\quad \alpha(t)y' + \beta(t)y = \gamma(t),$$

où α, β et γ sont des fonctions continues sur un intervalle J de $\mathbb{R}$.

Méthode de résolution

On veut résoudre (E) sur un intervalle I où la fonction α ne s'annule pas.

Etape 1. On se ramène à l'équation l'équation $(EC)\ \ y' + \dfrac{\beta(t)}{\alpha(t)}y = \dfrac{\gamma(t)}{\alpha(t)}$ que l'on écrit sous la forme :

$$(EC)\quad y' + b(t)y = c(t)$$

On dit que cette équation est *résolue* en y'.

Etape 2. On résout l'équation linéaire homogène associée (EDLHA) à (EC) :

$$(EH)\quad y' + b(t)y = 0.$$

Etape 3. On cherche une solution particulière U de l'équation différentielle (EC) sur I.

Etape 4. Les solutions de l'équation différentielle (EC) sur I sont exactement les fonctions de la forme $f + U$ où f est une solution de (EH).

1.1 Résolution de l'équation linéaire homogène associée

Les solutions sur I de

$$(EH)\quad y' + b(t)y = 0$$

sont exactement les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-B(t)}$ où B est une primitive de b sur I et λ un réel.
On dit que $t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-B(t)}$ est la *solution générale* de (EH) sur I.

1.2 Résolution finale

Les solutions de (EC) sur I sont exactement les fonctions de la forme $f+U$ où U est une solution particulière de (EC) et f une solution de (EH). Autrement dit les solutions de (EC) sur I sont exactement les fonctions de la forme

$$t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-B(t)} + U(t)$$

où λ est une constante réelle, B une primitive de b sur I et U est une solution particulière de (EC).

1.3 Recherche d'une solution particulière

• On regarde d'abord s'il n'y a pas de solution particulière évidente.

• **La méthode de la variation de la constante**
La solution générale de l'équation homogène $(EH)\quad y' + b(t)y = c(t)$ est $x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-B(x)}$ où ...
On cherche alors une solution particulière de (EC) sous la forme

$$f : x \mapsto \lambda(x)\mathrm{e}^{-B(x)}$$

où λ est cette fois une **fonction dérivable**.
Cela permet de déterminer λ'.

1.4 La condition initiale

• On considère l'équation différentielle

$$(E)\quad \alpha(x)y' + \beta(x)y = \gamma(x),$$

où α, β et γ sont des fonctions dérivables sur un intervalle I.

Théorème 1 (Cauchy-Lipschitz)
Lorsque α ne s'annule pas sur I, pour tout x_0 dans I et y_0 réel, ***il existe une unique solution*** *f de (E) tel que $f(x_0) = y_0$.*

• Interprétation graphique de ce résultat :

les graphes des solutions ne se coupent jamais !

1.5 Compléments

1. **Superposition des solutions**. Considérons les ED :

$$\begin{cases} (E_1) & \alpha(t)x' + \beta(t)x = \gamma_1(t) \\ (E_2) & \alpha(t)x' + \beta(t)x = \gamma_2(t) \end{cases}$$

   Si f_1 est solution sur un intervalle J de (E_1) et si f_2 est solution sur J de (E_2), alors la fonction $f_1 + f_2$ est solution sur J de

$$(E)\quad \alpha(t)x' + \beta(t)x = \gamma(t),$$

   où $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$.

2. Pour l'équation homogène résolue $(EH)\quad x' + a(t)x = 0$ on peut remarquer que :

   • La somme de deux solutions est encore une solution (voir ci-dessus).
   • Si f est solution alors λf est aussi solution pour tout réel (complexe...) λ.
   • Toutes les solutions s'obtiennent en multipliant $f_0 : t \mapsto \mathrm{e}^{-B(t)}$ par un réel (complexe...).

   Autrement dit l'ensemble des solutions de (EH) sur I est **un espace vectoriel de dimension 1** : si on connaît une solution non nulle de (EH) alors on les connaît toutes.

3. **Retenir :** pour une équation différentielle linéaire du premier ordre, les solutions dépendent d'un paramètre λ qui correspond à la condition initiale de la solution.

2 Équation différentielle linéaire à coefficients constants du second ordre

On s'intéresse ici à l'équation différentielle :

$$(E)\quad ay'' + by' + cy = \gamma(t),$$

où a, b, c sont des **complexes** et $\gamma : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I.

Méthode de résolution

Pour la recherche de solutions à valeurs complexes ou réelles, la démarche est la suivante.

Etape 1. On résout l'équation différentielle homogène associée :

$$(EH)\quad ay'' + by' + cy = 0.$$

Etape 2. On cherche une solution particulière U de (E).

Etape 3. Les solutions de (E) sont exactement les fonctions de la forme $f + U$ où f est une solution de (EH).

2.1 Résolution de l'équation homogène associée.

On s'intéresse ici à l'équation

$$(EH)\quad ay'' + by' + cy = 0,$$

où a, b et c sont des complexes.

L'équation caractéristique associée à (EH) est :

$$(EQ)\quad ar^2 + br + r = 0$$

• **Cas complexe.**

1. Si l'équation caractéristique admet deux solutions distinctes r_1 et r_2 (éventuellement dans $\mathbb{C}$) alors les solutions de (EH) sur I à valeurs complexes sont exactement les fonctions de la forme :

$$t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{r_1 t} + \mu \mathrm{e}^{r_2 t} \quad \text{où } \lambda\ \mu \text{ sont des complexes}$$

2. Si l'équation caractéristique admet une solution double r (éventuellement complexe) alors les solutions de (EH) sur I à valeurs complexes sont exactement les fonctions de la forme :

$$t \mapsto (\lambda t + \mu)\, \mathrm{e}^{rt} \quad \text{où } \lambda\ \mu \text{ sont des complexes}$$

• **Cas réel.**

1. Si l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 alors les solutions de (EH) sur $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions de la forme

$$t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{r_1 t} + \mu \mathrm{e}^{r_1 t} \quad \text{où } \lambda \text{ et } \mu \text{ sont des constantes réelles.}$$

2. Si l'équation caractéristique admet une seule racine réelle r alors les solutions de (EH) sur $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions de la forme

$$t \mapsto (\lambda t + \mu)\mathrm{e}^{rt} \quad \text{où } \lambda \text{ et } \mu \text{ sont des constantes réelles.}$$

3. Si l'équation caractéristique admet deux racines non réelles conjuguées $z_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$ et $z_2 = \overline{z_1} = \alpha - \mathrm{i}\beta$ alors les solutions de (EH) sur $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions de la forme

$$t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{\alpha t} \cos \beta t + \mu \mathrm{e}^{\alpha t} \sin \beta t \quad \text{où } \lambda \text{ et } \mu \text{ sont des constantes réelles.}$$

2.2 Trouver une solution particulière de l'équation complète.

On recherche d'abord une solution évidente. C'est facile lorsque le second membre $t \mapsto \gamma(t)$ est une fonction constante.

Second membre de la forme $gamma(t) = \cos \omega t$ ou $\sin \omega t$.

• Si γ n'est pas solution de (EH) on cherche une solution sous la forme :

$$t \mapsto A\cos\omega t + B\sin\omega t.$$

• Si γ est pas solution de (EH) on cherche une solution sous la forme :

$$t \mapsto t\left(A\cos\omega t + B\sin\omega t\right).$$

Lorsque le second membre sera de la forme $\gamma(t) = P(t)\mathrm{e}^{mt}$ où P est un polynôme. La recherche d'une solution particulière dépend de la valeur de m.

• Si m n'est pas racine de l'équation résolvante on cherche une solution particulière sous la forme $t \mapsto Q(t)\mathrm{e}^{mt}$ où Q est un polynôme de même degré que P.

• Si m est **racine simple** de l'équation résolvante on cherche une solution particulière sous la forme $t \mapsto tQ(t)\mathrm{e}^{mt}$ où Q est un polynôme de même degré que P.

• Si m est **racine double** de l'équation résolvante on cherche une solution particulière sous la forme $t \mapsto t^2Q(t)\mathrm{e}^{mt}$ où Q est un polynôme de même degré que P.

2.3 La condition initiale

Théorème 2 (Cauchy-Lipschitz)
On considère l'équation différentielle :

$$(E)\quad ay'' + by' + cy = \gamma(t),$$

où $a \neq 0$, b, c sont des ***complexes*** *et $\gamma : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I.*
Pour tout (t_0, x_0, v_0) dans $I \times \mathbb{C}^2 2$, ***il existe une unique solution*** *f de (E) sur I tel que* $\begin{cases} f(t_0) &= x_0 \\ f'(t_0) &= v_0 \end{cases}$.

• Interprétation graphique de ce résultat :

les graphes de deux solutions différentes à valeurs réelles ne peuvent être « tangents ».

2.4 Complément

On considère l'équation différentielle

$$(EH)\quad ay'' + by' + cy = 0,$$

où a, b et c sont des complexes.
Alors l'ensemble de solutions sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ de (EH) est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension deux.

3 Exercices

Exercice 1
On considère l'équation différentielle : $(E)\quad xy' + y = \dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$.

1. Résoudre (E) sur chacun des intervalles $]-1,0[$ et $]0,1[$.
2. En déduire que (E) admet une unique solution sur $]-1,1[$.

1. • Sur $]0,1[$, l'équation différentielle homogène associée à (E) est $(E_0)\quad y' + \dfrac{y}{x} = 0$. La solution générale de cette dernière équation est :

$$x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{-B(x)}$$

où λ est une constante réelle et B une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0,1[$. On prend bien sûr $B(x) = \ln x$ et la solution générale de (E_0) sur $]0,1[$ est alors :

$$x \mapsto \frac{\lambda}{x} \quad \text{où } \lambda \text{ est un réel.}$$

On cherche alors une solution particulière U de (E) sur $]0,1[$ par la méthode de la variation de la constante. Soit

$\lambda :]0,1[\to \mathbb{R}$ dérivable. On pose $U(x) = \dfrac{\lambda(x)}{x}$ pour $x \in]0,1[$.
On a alors :

$$U'(x) = \frac{\lambda'(x)x - \lambda(x)}{x^2}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
& U \text{ solution de } (E) \text{ sur }]0,1[\\
\Leftrightarrow \quad & \frac{\lambda'(x)x - \lambda(x)}{x} + \frac{\lambda(x)}{x} = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} \quad \text{pour } x \in]0,1[\\
\Leftrightarrow \quad & \lambda'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} \quad \text{pour } x \in]0,1[\\
\Leftrightarrow \quad & \text{Il existe } C \text{ constante telle que } \ \lambda(x) = \arcsin x^2 + C \ \ \text{pour } x \in]0,1[
\end{aligned}$$

On prend alors $U(x) = \dfrac{\arcsin x^2}{x}$ pour $x \in]0,1[$.

Conclusion. Les solutions de (E) sur $]0,1[$ sont donc exactement les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \frac{\arcsin x^2 + \lambda}{x} \quad \text{où } \lambda \text{ décrit } \mathbb{R}$$

• Sur $]-1,0[$, une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est $x \mapsto \ln|x| = \ln(-x)$. La solution générale de (E_0) $\ y' + \dfrac{y}{x} = 0$ sur $]-1,0[$ est donc :

$$x \mapsto \frac{\mu}{x} \quad \text{où } \mu \text{ est un réel.}$$

La fonction U définie par $U(x) = \dfrac{\arcsin x^2}{x}$ pour $x \in]-1,0[$ est encore une solution particulière de (E) sur $]-1,0[$.

Conclusion. Les solutions de (E) sur $]-1,0[$ sont donc exactement les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \frac{\arcsin x^2 + \mu}{x} \quad \text{où } \mu \text{ décrit } \mathbb{R}$$

2. • Si f est solution sur $]-1,1[$ de (E) cette fonction est aussi solution de (E) sur $]-1,0[$ et $]0,1[$. On dispose donc de deux constantes λ et μ telles que :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\arcsin x^2 + \lambda}{x} & \text{si } -1 < x < 0 \\ f(x) = \dfrac{\arcsin x^2 + \mu}{x} & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Puis f est continue en 0 et $\arcsin x^2 \underset{0}{\sim} x^2$: cela force $\lambda = \mu = 0$. On a donc :

$$f(x) = \frac{\arcsin x^2}{x} \quad \text{pour } x \in]-1,0[\cup]0,1[\text{ et } f(0) = 0.$$

• Réciproquement soit f la fonction définie sur $]-1,1[$ par :

$$f(x) = \frac{\arcsin x^2}{x} \quad \text{pour } x \in]-1,0[\cup]0,1[\text{ et } f(0) = 0.$$

Cette fonction f est continue en 0 et on a :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$$

donc f est dérivable en 0 de nombre dérivé $f'(0) = 1$. D'après la première question f est solution de (E) sur chacun des intervalles $]-1,0[$ et $]0,1[$ et on a bien $xf'(x) + f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$ pour $x = 0$. On en déduit donc que f est la seule solution de (E) sur $]-1,1[$. □

Exercice 2
Trouver toutes les fonctions f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout x et y réels on ait :

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

• Supposons qu'il existe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ application de classe C^2 telle que pour tout x réel on ait :

$$g(x) = \int_0^x (x-t)g(t)\,\mathrm{d}t + f(x)$$

On a donc pour tout x réel $g(x) = x\underbrace{\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t}_{=G(x)} - \underbrace{\int_0^x tg(t)\,\mathrm{d}t}_{=H(x)} + f(x)$.

Les fonctions g et $t \mapsto tg(t)$ sont continues sur $\mathbb{R}$ donc les fonctions G et H sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec :

$$G'x) = g(x) \text{ et } H'(x) = xg(x) \text{ pour tout } x \text{ réel}$$

Ainsi pour x réel on a :

$$g'(x) = G(x) + xG'(x) - H'(x) + f'(x) = G(x) + f'(x)$$

On peut alors dériver une nouvelle fois à bon droit ce qui amène :

$$g''(x) = g(x) + f''(x) \text{ pour tout } x \text{ réel}$$

Il en résulte que g est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' - y = f''(x).$$

De plus on a $g(0) = f(0)$ et $g'(0) = f'(0)$ donc g est **LA** solution de (E) de condition initiale $y(0) = f(0)$ et $y'(0) = f'(0)$ ce qui prouve, **sous réserve d'existence**, l'unicité d'une telle fonction g.

• Définissons maintenant une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la manière suivante : g est **LA** solution de (E) de condition initiale $y(0) = f(0)$ et $y'(0) = f'(0)$. On a donc pour tout t réel : $g''(t) = g(t) + f''(t)$.
Ainsi pour tout x réel on a :

$$\int_0^x g''(t)\mathrm{d}t = \int_0^x g(t)\mathrm{d}t + \int_0^x f''(t)\mathrm{d}t \text{ i.e. } g'(x) - g'(0) = G(x) + f'(x) - f'(0)$$

Comme $g'(0) = f'(0)$ il reste $g'(t) = G(t) + f'(t)$ pour tout t réel.
On intégre à nouveau et on a donc pour tout x réel :

$$\int_0^x g'(t)\mathrm{d}t = \int_0^x G(t)\mathrm{d}t + \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t \text{ i.e. } g(x) - g(0) = \int_0^x G(t)\mathrm{d}t + f(x) - f(0)$$

Comme $g(0) = f(0)$ il vient $g(x) = \displaystyle\int_0^x G(t)\,\mathrm{d}t + f(x)$ pour tout x réel. Il reste alors à calculer l'intégrale dans cette égalité. On fait une IPP ; pour x réel on a :

$$\begin{aligned}\int_0^x G(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^x 1 \times G(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \{tG(t)]_0^x - \int_0^x t \times G'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= xG(x) - \int_0^x tg(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

et ainsi on obtient $g(x) = \displaystyle\int_0^x (x-t)g(t)\mathrm{d}t + f(x)$ pour tout x réel.

• Si maintenant $f = \cos$ alors $f'' = -\cos$ et ainsi g est la solution de

$$(E) \quad y'' - y = -\cos x$$

sur $\mathbb{R}$ telle que $g(0) = \cos 0 = 1$ et $g'(0) = \cos'(0) = 0$. On résout sans peine l'équation homogène associée dont les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto \lambda \mathrm{e}^x + \mu \mathrm{e}^{-x} \text{ où } \lambda \text{ et } \mu \text{ décrivent } \mathbb{R}$$

On cherche ensuite une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ sous la forme $U(t) = A\cos t$ où A est une constante (on s'inspire de la forme du second membre pour chercher la solution particulière). On trouve de suite $A = \frac{1}{2}$ de sorte qu'il existe λ et μ réels tels que :

$$g(x) = \lambda \mathrm{e}^x + \mu \mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}\cos t$$

Les conditions initiales amènent alors : $A = B = \dfrac{1}{4}$.