

# Digest sur les suites réelles ou complexes

PC, Lycée Joffre

9 décembre 2024

## Table des matières

|          |                                                               |          |
|----------|---------------------------------------------------------------|----------|
| <b>1</b> | <b>Convergence</b>                                            | <b>1</b> |
| 1.1      | Définitions . . . . .                                         | 1        |
| 1.2      | Premières propriétés . . . . .                                | 1        |
| 1.3      | Limites et inégalités . . . . .                               | 2        |
| 1.4      | Le théorème de la limite monotone dans $\mathbb{R}$ . . . . . | 2        |
| 1.5      | Le théorème des suites adjacentes . . . . .                   | 2        |
| <b>2</b> | <b>Limite infinie d'une suite réelle</b>                      | <b>2</b> |
| 2.1      | Définition . . . . .                                          | 2        |
| 2.2      | Limites et inégalités . . . . .                               | 3        |
| 2.3      | Le théorème de la limite monotone . . . . .                   | 3        |
| <b>3</b> | <b>Notions rudimentaires sur les suites extraites</b>         | <b>3</b> |
| <b>4</b> | <b>Caractérisation séquentielle de certains phénomènes</b>    | <b>3</b> |
| <b>5</b> | <b>Suites particulières</b>                                   | <b>4</b> |
| 5.1      | Quelques sommes . . . . .                                     | 4        |
| 5.2      | Suites arithmético-géométriques. . . . .                      | 4        |
| 5.3      | Suites récurrentes linéaires d'ordre 2. . . . .               | 4        |
| <b>6</b> | <b>Relations de comparaison pour les suites</b>               | <b>4</b> |
| 6.1      | Définitions . . . . .                                         | 4        |
| 6.2      | Des exemples à connaître . . . . .                            | 5        |
| 6.3      | Propriétés . . . . .                                          | 5        |
| 6.4      | Opérations sur les équivalents . . . . .                      | 5        |
| 6.5      | Croissances comparées . . . . .                               | 5        |

## 1 Convergence

### 1.1 Définitions

**NB** : les suites considérées sont des suites réelles ou complexes.  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

- Une suite dans  $\mathbb{K}$  est une application  $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ . On note en général, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  à la place de  $u(n)$ .
- Une suite réelle  $u$  est **majorée** lorsqu'il existe un réel  $M$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on ait  $u_n \leq M$ .  
Une suite dans  $\mathbb{K}$  est **bornée** lorsqu'il existe un réel  $M$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on ait  $|u_n| \leq M$ .
- **Monotonie**. Une suite réelle  $u$  est strictement croissante lorsque, **pour tout**  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_n < u_{n+1}$ . On a de même la notion de suite croissante (remplacer  $<$  par  $\leq$ ), de suite décroissante et de suite strictement décroissante. Une suite est **monotone** lorsqu'elle croissante ou décroissante.
- Une suite  $u$  dans  $\mathbb{K}$  converge vers  $\ell \in \mathbb{K}$  lorsque :

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}) (\forall n \geq N_\varepsilon) (|u_n - \ell| \leq \varepsilon).$$

On écrit alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$  ou  $u_n \xrightarrow{+\infty} \ell$ .

- Cela signifie que pour tout  $\varepsilon > 0$  donné tous les termes de la suite  $u$  se trouve, à partir d'un certain rang dépendant du choix de  $\varepsilon$ , dans le disque de centre  $\ell$  et de rayon  $\varepsilon$  (dans le cas complexe) ou dans un intervalle de centre  $\ell$  et de rayon  $\varepsilon$  (dans le cas réel).
- Le nombre  $\varepsilon$  quantifie la distance entre  $\ell$  et les termes de la suite : a priori il est petit.
- Noter que, d'après l'ordre des quantificateurs,  $N_\varepsilon$  dépend du choix de  $\varepsilon$ . A priori plus  $\varepsilon$  est petit, plus  $N_\varepsilon$  est grand
- Une suite réelle ou complexe est convergente lorsque :

$$(\exists \ell \in \mathbb{K}) (\forall \varepsilon > 0) (\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}) (\forall n \geq N_\varepsilon) (|u_n - \ell| \leq \varepsilon)$$

## 1.2 Premières propriétés

### Théorème 1

Lorsque  $u$  est une suite dans  $\mathbb{K}$ , la suite  $u$  converge vers 0 si et seulement si la suite  $|u|$  converge vers 0.

### Théorème 2 (Unicité de la limite)

Si  $u$  est une suite dans  $\mathbb{K}$  qui converge vers  $\ell$  et  $\lambda$  alors  $\ell = \lambda$ .

### Théorème 3

Toute suite convergente dans  $\mathbb{K}$  est bornée.

### Remarque 1.1

Il n'y a pas de réciproque (considérer  $u_n = (-1)^n$ ).

## 1.3 Limites et inégalités

On parle ici de suites réelles.

### Théorème 4 (Passage à la limite dans une inégalité)

Soient  $u$  et  $v$  des suites qui convergent respectivement vers  $\ell \in \mathbb{R}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Si, pour tout  $n$  à partir d'un certain rang, on a  $u_n < v_n$  alors  $\ell \leq \lambda$ .

#### Remarque.

- On retient que l'on ne garde pas l'inégalité stricte par passage à la limite.
- Bien noter que les suites  $u$  et  $v$  sont convergentes par hypothèses.

### Théorème 5 (Le théorème du Sandwich)

Soient  $u$ ,  $v$  et  $w$  des suites réelles. On suppose que :

- Les suites  $u$  et  $w$  convergent vers le même réel  $\ell$  ;
- Il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq N$ , on ait  $u_n \leq v_n \leq w_n$ .

Alors la suite  $v$  converge vers  $\ell$ .

### Remarque 1.2

Ce théorème est à la fois qualitatif et quantitatif. La conclusion est double : il permet d'assurer l'existence d'une limite et de quantifier cette limite.

### Corollaire 5.1

1. Le produit d'une suite de limite nulle par une suite bornée converge vers 0.
2. Tout réel est limite d'une suite de rationnels.

## 1.4 Le théorème de la limite monotone dans $\mathbb{R}$

### Théorème 6

1. Toute suite réelle croissante et majorée converge.
2. Toute suite réelle décroissante et minorée converge.

### Remarque 1.3

C'est un résultat qualitatif : il ne permet pas de déterminer la limite. Ce résultat sert à assurer l'existence de la limite d'une suite, mais pour déterminer cette limite, il faudra utiliser un autre théorème.

## 1.5 Le théorème des suites adjacentes

On travaille ici avec des **suites réelles**.

**Définition 1** Deux suites réelles sont adjacentes lorsque :

- l'une est décroissante ;
- l'autre est croissante ;
- la limite de la différence des deux suites est nulle.

**Théorème 7 (Théorème des suites adjacentes)**

Deux suites adjacentes  $u$  et  $v$  convergent vers le même réel  $\ell$ . Ce réel est l'unique réel tel que, pour tout  $n$  entier naturel, on ait  $u_n \leq \ell \leq v_n$ .

EXEMPLE. Les suites  $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$  et  $v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$  sont adjacentes et convergent vers  $e$ .

## 2 Limite infinie d'une suite réelle

### 2.1 Définition

Une suite réelle tend vers  $+\infty$  et on écrit  $u_n \xrightarrow{+\infty} +\infty$  lorsque :

$$(\forall A > 0) (\exists N_A \in \mathbb{N}) (\forall n \geq N_A) (u_n \geq A)$$

Dans cette définition, le réel  $A$  est moralement grand et l'entier  $N_A$  dépend du choix de  $A$ . De même on a la notion de suites qui admettent  $-\infty$  pour limite. Ces suites sont dites *divergentes de première espèce*.

### 2.2 Limites et inégalités

**Théorème 8**

Si  $u_n \leq v_n$  pour tout  $n$  à partir d'un certain rang et si  $u_n \xrightarrow{+\infty} +\infty$  alors  $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ .

**Remarque 2.1**

Penser à toutes les variantes possibles du résultat ci-dessus.

### 2.3 Le théorème de la limite monotone

**Théorème 9**

Toute suite réelle croissante et non majorée diverge vers  $+\infty$ .

**Remarque 2.2**

Il y a bien sûr un énoncé analogue pour une suite décroissante et non minorée.

## 3 Notions rudimentaires sur les suites extraites

**Définition 2** Une extraction est une application  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante. Lorsque  $u$  est une suite dans  $\mathbb{K}$  on dit que  $v$  est une suite extraite de  $u$  lorsqu'il existe  $\varphi$  extraction telle que pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$  on ait  $v_n = u_{\varphi(n)}$ .

**Théorème 10**

Lorsque  $u$ , suite dans  $\mathbb{K}$ , admet une limite en  $+\infty$ , toute suite extraite de  $u$  admet la même limite.

**Remarque 3.1**

1. Si  $u_n \rightarrow \ell$  alors pour tout  $q$  entier la suite définie par  $v_n = u_{n+q}$  converge vers  $\ell$  : on ne change pas le comportement asymptotique de la suite en y enlevant ses premiers termes.
2. **Deux par deux** :  $u_n \rightarrow \ell$  si et seulement si  $(u_{2n} \rightarrow \ell \text{ et } u_{2n+1} \rightarrow \ell)$  (pour  $u$  suite dans  $\mathbb{K}$ ).

## 4 Caractérisation séquentielle de certains phénomènes

### Théorème 11 (Caractérisation séquentielle de la limite)

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \bar{I}$  et  $\ell \in \mathbb{R}$ . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

- (1)  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ .
- (2) Pour toute suite  $(u_n)$  dans  $I$  telle que  $u_n \xrightarrow{+\infty} a$  on a  $f(u_n) \xrightarrow{+\infty} \ell$ .

**Démonstration.** • (1)  $\Rightarrow$  (2) est le théorème de composition des limites.

• (2)  $\Rightarrow$  (1) Par l'absurde. On suppose  $a$  réel (adapter si  $a = +\infty \dots$ ). On suppose donc :

$$(\exists \varepsilon > 0) (\forall \alpha > 0) (\exists x \in I) (|x - a| \leq \alpha \text{ et } |f(x) - \ell| > \varepsilon)$$

En prenant, à  $n$  fixé dans  $\mathbb{N}$ ,  $\alpha = 2^{-n}$ , on donc l'existence de  $x_n$  dans  $I$  tel que  $|x_n - a| \leq 2^{-n}$  et  $|f(x_n) - \ell| > \varepsilon$ . Cela nous fournit donc une suite  $(x_n)$  dans  $I$  telle que  $x_n \xrightarrow{+\infty} a$  et  $f(x_n)$  ne converge pas vers  $\ell$  : c'est absurde.  $\square$

### Théorème 12 (Caractérisation séquentielle de la continuité)

Soient  $a \in I$  intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Alors  $f$  est continue en  $a$  si et seulement si pour toute suite  $(x_n)$  dans  $I$  telle que  $x_n \xrightarrow{+\infty} a$  on a  $f(x_n) \xrightarrow{+\infty} f(a)$ .

#### Corollaire 12.1

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue qui vérifie  $f(I) \subset I$  et  $(u_n)$  une suite définie par  $u_0 \in I$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . Si la suite  $(u_n)$  converge vers  $\ell \in I$  alors  $f(\ell) = \ell$ .

### Théorème 13 (Caractérisation séquentielle de la borne inférieure)

Soit  $A$  une partie minorée et non vide de  $\mathbb{R}$ . Démontrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (1)  $m = \inf A$
- (2)  $m$  minore  $A$  et il existe une suite  $(u_n)$  dans  $A$  telle que  $u_n \xrightarrow{+\infty} m$ .

**Démonstration.** Comme  $A$  est minorée et non vide,  $\inf A$  existe bien dans  $\mathbb{R}$  (axiome de la borne inférieure).

• (1)  $\Rightarrow$  (2). On suppose  $m = \inf A$ . Ainsi  $m$  minore  $A$ . De plus, pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $a \in A$  tel que  $a - m \leq \varepsilon$ . Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  il existe  $x_n \in A$  tel que  $0 \leq x_n - m \leq 2^{-n}$  et par sandwich on a  $x_n \xrightarrow{+\infty} m$ .

• Réciproque *bla*<sup>2</sup>.  $\square$

## 5 Suites particulières

### 5.1 Quelques sommes

$$\Sigma_1 = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \Sigma_2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ et } \Sigma_3 = \sum_{k=1}^n k^3 = \Sigma_1^2$$

### 5.2 Suites arithmético-géométriques.

Il s'agit des suites de la forme  $u_{n+1} = au_n + b$  où  $a$  et  $b$  sont des complexes ( $a \neq 1$ ). Si  $\alpha$  est la solution de l'équation  $x = ax + b$  alors  $v_n = u_n - \alpha$  est une suite géométrique de raison  $a$  ce qui permet de déterminer  $u_n$  pour tout  $n$  entier. En effet pour  $n$  entier naturel :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha = au_n + b - (a\alpha + b) = \alpha(u_n - \alpha) = \alpha v_n$$

### 5.3 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

On considère ici les suites  $(u_n)$  dans  $\mathbb{K}$  définie, pour  $n$  entier naturel, par la relation de récurrence

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \quad (\clubsuit)$$

où  $a$  et  $b$  sont dans  $\mathbb{K}$ .

Ces suites forment un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  de dimension 2. Pour déterminer ces suites on considère l'équation caractéristique :

$$(EC) \quad X^2 - aX - b = 0$$

- Lorsque  $(EC)$  a deux racines **distinctes**  $r_1$  et  $r_2$  dans  $\mathbb{K}$  alors les suites dans  $\mathbb{K}$  qui vérifient  $(\clubsuit)$  sont exactement celles de la la forme

$$n \mapsto \alpha r_1^n + \beta r_2^n \quad \text{où } (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$$

- Lorsque  $(EC)$  a une racine **double**  $r$  dans  $\mathbb{K}$  alors les suites dans  $\mathbb{K}$  qui vérifient  $(\clubsuit)$  sont exactement celles de la la forme

$$n \mapsto (\alpha n + \beta)r^n \quad \text{où } (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$$

- Lorsque  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  on a un cas supplémentaire. Lorsque  $(EC)$  n'a pas de solution réelle, elle admet deux solutions complexes conjuguées  $\rho e^{i\theta}$  et  $\rho e^{-i\theta}$  et alors les suites dans  $\mathbb{R}$  qui vérifient  $(\clubsuit)$  sont exactement celles de la la forme

$$n \mapsto \rho^n (\alpha \cos n\theta + \beta \sin n\theta) \quad \text{où } (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$$

## 6 Relations de comparaison pour les suites

### 6.1 Définitions

**Définition 3** Les suites considérées sont des suites réelles ou complexes. Soient  $u_n$  et  $v_n$  deux suites complexes.

1. On dit que  $u_n$  est négligeable devant  $v_n$  et on écrit  $u_n \ll_{+\infty} v_n$  ou  $u_n = o_{+\infty}(v_n)$  lorsque pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a  $u_n = v_n \varepsilon_n$  avec  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ .
2. On dit que  $u_n$  est équivalente à  $v_n$  et on écrit :  $u_n \sim_{+\infty} v_n$  lorsque pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a  $u_n = v_n(1 + \varepsilon_n)$  avec  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ .
3. On dit que  $u_n$  est dominée par  $v_n$  et on écrit  $u_n = O_{+\infty}(v_n)$  lorsque lorsque pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a  $|u_n| \leq M |v_n|$ .

#### Remarque 6.1

1. Lorsque la suite  $v_n$  ne s'annule pas on a :

$$\begin{aligned} & \text{— } u_n = o_{+\infty}(v_n) \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \rightarrow 0 \\ & \text{— } u_n \sim_{+\infty} v_n \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \rightarrow 1 \\ & \text{— } u_n = O_{+\infty}(v_n) \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \text{ bornée} \end{aligned}$$

2. Ne pas écrire  $u_n \sim 0$ . En effet cela signifie  $u_n = 0$  à partir d'un certain rang.

### 6.2 Des exemples à connaître

- Si  $u_n \rightarrow 0$  alors :

$$\begin{aligned} & \text{— } \ln(1 + u_n) \sim u_n \\ & \text{— } \sin(u_n) \sim u_n \\ & \text{— } e^{u_n} - 1 \sim u_n \\ & \text{— } \tan(u_n) \sim u_n \end{aligned}$$

Ces exemples sont basés sur le fait suivant : si  $f$  est une fonction dérivable en 0 alors **l'indentité de la dérivée** donne

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + x\varepsilon(x) \quad \text{où } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

- La formule de STIRLING (admise pour l'instant) :  $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}$ .

### 6.3 Propriétés

#### Théorème 14

- Si  $u_n \sim v_n$  et  $v_n \sim w_n$  alors  $u_n \sim w_n$ .
- **Une caractérisation importante** :  $u_n \sim v_n$  si et seulement si  $u_n - v_n = o(v_n)$ .
- Si  $u_n = o(v_n)$  alors  $u_n + v_n \sim v_n$ .
- Si  $u_n \sim v_n$  et  $u_n \xrightarrow{+\infty} \ell$  alors  $v_n \xrightarrow{+\infty} \ell$ .
- Si  $\ell \in \mathbb{C}^*$ ,  $u_n \rightarrow \ell \Leftrightarrow u_n \sim \ell$
- $u_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow u_n = o(1)$
- $(u_n)$  bornée  $\Leftrightarrow u_n = O(1)$

### 6.4 Opérations sur les équivalents

- Produit/inverse et quotient : tout se passe bien. Par exemple  $\frac{P(n)}{Q(n)} \sim$  quotient des termes de plus haut degré.
- On ne peut pas en général sommer des équivalents. **Un principe : ne pas écrire  $u_n \sim$  somme dont les termes ont des ordres de grandeur différents.** Par exemple écrire  $u_n \sim \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}$  est débile puisque l'on a aussi  $u_n \sim \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{100}{n^3}$  ; on écrit plutôt :

$$u_n \sim \frac{1}{n}$$

Prendre un équivalent, c'est travailler au premier ordre.

- **Equivalents et exponentielles.** Cela ne marche pas en général.  $u_n \sim v_n \Rightarrow e^{u_n} \sim e^{v_n}$  est FAUX. Le bon énoncé est :

$$u_n - v_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow e^{u_n} \sim e^{v_n}$$

- **Equivalents et logarithmes** :  $u_n \sim v_n \Rightarrow \ln u_n \sim \ln v_n$  est FAUX en général.
- **TECHNIQUE** : pour éviter ces écueils, on peut remplacer les équivalents par des égalités en revenant à la définition.

- Par « comparaison série/intégrale » on peut montrer que  $H_n \sim \ln n$  où  $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ .

### 6.5 Croissances comparées

#### Théorème 15

On a pour  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $a > 1$  :

$$(\ln n)^\alpha \ll_{+\infty} n^\beta \ll_{+\infty} a^n \ll_{+\infty} n! \ll_{+\infty} n^n$$

La preuve de ce résultat utilise par exemple le lemme suivant, intéressant à démontrer en soit, et qui peut servir pour les séries :

LEMME. Pour deux suites strictement positives, si à partir d'un certain rang on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \quad \text{alors} \quad u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n)$$

S'entraîner sur la preuve de  $n^\beta \ll_{+\infty} a^n$ .