

Ch 02 - Espaces vectoriels normés, premiers pas

Table des matières

1 Normes	1
1.1 Définitions	1
1.2 Premiers exemples	2
1.3 Boules et Sphères	3
1.4 Parties convexes d'un espace vectoriel	4
1.5 Parties bornées d'un espace vectoriel normé, applications bornées	4
1.6 Suites dans les espaces vectoriels normés et extractions	5
1.7 Normes équivalentes	6
2 Continuité des fonctions entre espaces vectoriels normés	6
2.1 Continuité en un point	6
2.2 Applications lipschitziennes	7
2.3 Opérations classiques sur les fonctions continues.	7
3 Applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés	8
3.1 Le théorème fondamental	8
3.2 Normes d'opérateurs (compléments hors programme)	8
4 Espaces vectoriels normés de dimension finie	11
4.1 Suites convergentes dans un espace vectoriel de dimension finie .	11
4.2 Continuité en dimension finie	11
4.3 Continuité des applications linéaires, multilinéaires et polynomiales	12

1 Normes

1.1 Définitions

Définition 1 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Une norme sur E est une application $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie pour tout x, y dans E et λ scalaire :

1. $\|x\| \geq 0$
2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
4. **Inégalité triangulaire** : $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Remarque 1.1

1. Un espace vectoriel normé est un couple $(E, \| \cdot \|)$ où E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $\| \cdot \|$ est une norme sur E .
2. Soit $(E, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé. On définit une distance sur E en posant pour tout $(x, y) \in E$:

$$d(x, y) = \|y - x\|.$$

Cette distance est « invariante par translation » : pour tout $(x, y) \in E^2$ et $v \in E$ on a :

$$d(x + v, y + v) = d(x, y).$$

3. Pour les normes provenant d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ euclidien ou hermitien sur E , définies par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, l'inégalité triangulaire est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

En effet, pour x et y dans E on a :

$$\begin{aligned} \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| &\Leftrightarrow \|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \\ &\Leftrightarrow \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \\ &\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \leq \|x\|\|y\| \end{aligned}$$

1.2 Premiers exemples

- Sur $\mathbb{K}^n$ on a les normes usuelles suivantes ($v = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$) :

$$\|v\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|, \quad \|v\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}, \quad \|v\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|.$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la norme $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ (dans le cas de $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, elle provient du produit scalaire hermitien canonique).

Exercice 1

Démontrer que : $\| \cdot \|_2 \leq \sqrt{n} \| \cdot \|_\infty \leq \sqrt{n} \| \cdot \|_1 \leq n \| \cdot \|_2$.

Soit $v = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

- On a $\|v\|_2^2 = \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \leq n \|v\|_\infty^2$.

- $\|v\|_\infty \leq \sum_{k=1}^n |x_k| = \|v\|_1$.

- $\|v\|_1 = \langle u, w \rangle \leq \|u\|_2 \|w\|_2$ où $w = (|x_1|, \dots, |x_n|)$ et $u = (1, \dots, 1)$, donc :

$$\|v\|_1 \leq \sqrt{n} \|v\|_2.$$

Exercice 2 (Inégalités de Hölder et Minkowsky)

Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des réels positifs, p et q des réels > 1 tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Soient x et y réels positifs. Démontrer que $xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$.
2. On pose $A = \sum_{i=1}^n a_i^p$ et $B = \sum_{i=1}^n b_i^q$, sommes que l'on suppose non nulles. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on pose encore :

$$x_i = \frac{a_i}{A^{\frac{1}{p}}} \quad \text{et} \quad y_i = \frac{b_i}{B^{\frac{1}{q}}}$$

Utiliser la première question pour en déduire l'inégalité de HÖLDER :

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

3. Pour $v = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ on pose : $\|v\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}$. Démontrer que $\| \cdot \|_p$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$ (l'inégalité triangulaire s'appelle l'inégalité de MINKOWSKY).

1. Si x ou y est nul c'est évident. Sinon on pose $u = \ln x$ et $v = \ln y$. Par convexité de $\exp$ il vient :

$$\exp(u+v) = \exp\left(\frac{1}{p}pu + \frac{1}{q}qv\right) \leq \frac{1}{p}e^{pu} + \frac{1}{q}e^{qv}$$

et ainsi $xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$.

2. La première question affirme que : $x_i y_i \leq \frac{1}{p}x_i^p + \frac{1}{q}y_i^q$.

Par somme on a donc :

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{p}x_i^p + \frac{1}{q}y_i^q \right) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n x_i^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n y_i^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

d'où le résultat.

3. Il n'y a pas de problème pour montrer la séparation et l'homogénéité. Pour l'inégalité triangulaire, on prend $v = (x_1, \dots, x_n)$ et $w = (y_1, \dots, y_n)$ dans $\mathbb{K}^n$. On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p &= \sum_{k=1}^n \underbrace{|x_k + y_k|}_{\leq |x_k| + |y_k|} |x_k + y_k|^{p-1} \\ &\leq \sum_{k=1}^n |x_k| |x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^n |y_k| |x_k + y_k|^{p-1} \end{aligned}$$

On applique alors l'inégalité de HÖLDER avec p et $q = \frac{p}{p-1}$ (qui vérifient bien $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) aux deux termes du second membre pour obtenir :

$$\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \leq \left(\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p \right)^{1/p} \right) \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{1/q},$$

ce qui donne le résultat, en séparant les cas $\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p = 0$ ou non.

- Sur l'espace $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a les exemples de normes ($A \in E$) :

$$\|A\|_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |(A)_{i,j}|, \quad \|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |(A)_{i,j}|^2}, \quad \|A\|_\infty = \max_{(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2} |(A)_{i,j}|.$$

Il est important de noter que la $\|\cdot\|_2$ provient du produit scalaire : $(A, B) \mapsto \text{tr}(A^T B)$.

Noter aussi que les normes utiles sur E sont celles pour lesquelles on a $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ pour tout $(A, B) \in E^2$ (on parle de norme d'algèbre).

Exercice 3

Démontrer que $n \|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$ sont des normes d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ on a :

$$|(AB)_{i,j}| = \left| \sum_{k=1}^n (A)_{i,k} (B)_{k,j} \right| \leq \sum_{k=1}^n \underbrace{|(A)_{i,k}|}_{\leq \|A\|_\infty} \underbrace{|(B)_{k,j}|}_{\leq \|B\|_\infty}$$

Ainsi $\|AB\|_\infty \leq n \|A\|_\infty \|B\|_\infty$, d'où $n \|\cdot\|_\infty$ est une norme d'algèbre.

- Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ on a :

$$\begin{aligned} \|AB\|_2^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |(AB)_{i,j}|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n |(A)_{i,k}| |(B)_{k,j}| \right)^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n |(A)_{i,k}|^2 \right)}_{\leq \|A\|_2^2} \underbrace{\left(\sum_{\ell=1}^n |(B)_{\ell,j}|^2 \right)}_{\leq \|B\|_2^2} \\ &= \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |(A)_{i,k}|^2 \right)}_{=\|A\|_2^2} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n \sum_{\ell=1}^n |(B)_{\ell,j}|^2 \right)}_{=\|B\|_2^2} \end{aligned}$$

- Sur l'espace E des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ on a les exemples de normes ($f \in E$) :

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f|, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f|^2}, \quad \|f\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

La norme $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire

$$(f, g) \mapsto \int_a^b fg.$$

- Lorsque X est un ensemble non vide et $E = \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des applications bornées de X dans $\mathbb{R}$, l'application :

$$\|\cdot\|_\infty : f \mapsto \sup_{x \in X} |f(x)|$$

est une norme sur E .

1.3 Boules et Sphères

Définition 2 Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $a \in E$ et $r > 0$.

1. La boule ouverte de centre a et de rayon r est :

$$B_o(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| < r\}.$$

2. La boule fermée de centre a et de rayon r est :

$$B_f(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| \leq r\}.$$

3. La sphère de centre a et de rayon r est :

$$S(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| = r\}.$$

Remarque 1.2

Les boules d'un espace vectoriel normé « se ressemblent toutes » :

$$B_f(a, r) = a + r B_f(0, 1).$$

Exercice 4

1. Dessiner la boules unité fermée sur $\mathbb{R}^2$ pour les trois normes usuelles.
2. Tracer l'allure de la « médiatrice » du segment $[AB]$ où $A = (-1, 0)$ et $B = (1, 0)$ dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$.

1. Pour $v = (x, y)$ dans $\mathbb{R}^2$ on a $\|v\|_1 \leq 1 \Leftrightarrow |x| + |y| \leq 1$. Ainsi $B_1 = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \|v\|_1 \leq 1\}$ est symétrique par rapport à l'axe $x = 0$ et l'axe $y = 0$. On se contente de regarder $B_1 \cap (\mathbb{R}^+)^2$. On a alors pour $v = (x, y)$ dans $\mathbb{R}^2$:

$$v \in B_1 \cap (\mathbb{R}^+)^2 \Leftrightarrow x + y \leq 1$$

ce qui permet de dessiner B_1 (voir figure 1)

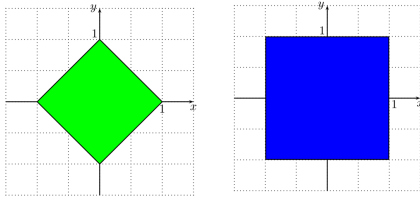


FIGURE 1 – Boules unités fermées de $\mathbb{R}^2$ pour $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$

2. La « médiatrice » demandée est en rouge sur la figure 2.

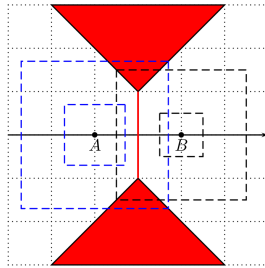


FIGURE 2 – « médiatrice » dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$

1.4 Parties convexes d'un espace vectoriel

Définition 3 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On dit qu'une partie A de E est convexe lorsque pour tout $(m, p) \in A^2$ le segment d'extrémité m et p est encore dans A , ce qui se traduit par :

$$(\forall \lambda \in [0, 1]) ((1 - \lambda)m + \lambda p) \in A.$$

Remarque 1.3

1. Cette notion ne dépend pas de la norme mais de la structure vectorielle.
2. Pour tout $a \in E$ et λ réel on a : $(1 - \lambda)a + \lambda a = a$.

Théorème 1

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Les boules de E sont convexes.
2. Une intersection de parties convexes de E est encore convexe.

Exercice 5

Démontrer le théorème 1.

1. Soient $a \in E$ et $r > 0$. Soient x et y dans $B(a, r)$ ainsi que $\lambda \in [0, 1]$. On a alors :

$$\begin{aligned} \|(1 - \lambda)x + \lambda y - a\| &= \|(1 - \lambda)(x - a) + \lambda(y - a)\| \\ &\leq (1 - \lambda)\|x - a\| + \lambda\|y - a\| \\ &< (1 - \lambda)r + \lambda r = r \end{aligned}$$

2. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de convexes de E .

Soient x et y dans $\bigcap_{i \in I} A_i$ ainsi que $\lambda \in [0, 1]$.

Pour tout $i \in I$ on a $x \in A_i$ et $y \in A_i$, donc $(1 - \lambda)x + \lambda y \in A_i$, puisque A_i est convexe. Ainsi :

$$(1 - \lambda)x + \lambda y \in \bigcap_{i \in I} A_i.$$

1.5 Parties bornées d'un espace vectoriel normé, applications bornées

Définition 4 Soit $A \subset E$ où $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé. On dit que A est bornée dans $(E, \|\cdot\|)$ lorsque A est inclus dans une boule de $(E, \|\cdot\|)$.

Remarque 1.4

1. Noter que la notion de partie bornée dépend du choix de la norme.
2. Lorsque $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé, $A \subset E$ est borné dans $(E, \|\cdot\|)$ lorsqu'il existe $R > 0$ tel que pour tout $v \in A$ on ait : $\|v\| \leq R$.

Exercice 6

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et A une partie non vide de E . Le diamètre de A est :

$$\text{diam}(A) = \sup_{(x,y) \in A^2} \|x - y\|.$$

Démontrer que A est borné si et seulement si son diamètre est fini.

- Notons que $\text{diam}(A)$ est bien défini puisque l'ensemble $\{d(a,b) \mid (a,b) \in A^2\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ donc $\sup_{(x,y) \in A^2} d(x,y)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}^+$.
- Si A est une partie bornée de E , il existe $x_0 \in E$ et $r > 0$ tels que $A \subset B(x_0, r)$. Ainsi, pour tout a et b dans A il vient

$$d(a,b) \leq d(a, x_0) + d(x_0, b) \leq 2r,$$

et ainsi $\text{diam}(A) \leq 2r$.

- Supposons que $\text{diam}(A)$ soit fini. Fixons $a_0 \in A$. Pour tout $a \in A$ on a :

$$d(a, a_0) \leq \text{diam}(A),$$

donc A est borné dans E .

Définition 5 Soient X un ensemble quelconque, $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $f : X \rightarrow E$. On dit que f est bornée lorsque $\text{Im } f$ est bornée dans $(E, \|\cdot\|)$.

1.6 Suites dans les espaces vectoriels normés et extractions

Définition 6 Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, (u_n) une suite dans E et $\ell \in E$. On dit que la suite (u_n) converge vers ℓ lorsque $\|u_n - \ell\| \xrightarrow{+\infty} 0$ i.e. :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)(\|u_n - \ell\| \leq \varepsilon)$$

Remarque 1.5

La notion de convergence de suites dépend de la norme (ce ne sera pas le cas pour les espaces vectoriels normés de dimension finie).

Théorème 2

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé

1. Il y a unicité de la limite pour une suite convergente.
2. Une suite convergente dans $(E, \|\cdot\|)$ est bornée.

Démonstration.

1. Supposons qu'une (u_n) dans $(E, \|\cdot\|)$ converge vers ℓ et λ dans E . Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors N_1 et N_2 dans $\mathbb{N}$ tels que :

$$\begin{cases} (\forall n \geq N_1)(\|u_n - \ell\| \leq \varepsilon) \\ (\forall n \geq N_2)(\|u_n - \lambda\| \leq \varepsilon) \end{cases}$$

Si $n \geq \max(N_1, N_2)$ il vient :

$$\|\ell - \lambda\| \leq \|\ell - u_n + u_n - \lambda\| \leq \|\ell - u_n\| + \|u_n - \lambda\| \leq 2\varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$ on a $d(\ell, \lambda) \leq 2\varepsilon$ et $\varepsilon \xrightarrow{+\infty} 0$ donne $d(\ell, \lambda) = 0$.

2. Supposons qu'une (u_n) dans $(E, \|\cdot\|)$ converge vers ℓ . Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $d(u_n, \ell) \leq 1$.

Puis posons $R = \max\{\|u_0 - \ell\|, \dots, \|u_N - \ell\|, 1\}$. On a alors $u_n \in B_f(\ell, R)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: la suite (u_n) est bornée.

□

Définition 7 Une extraction est une application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante.

Remarque 1.6

Soit φ est une extraction. On a alors : $\varphi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En effet, si $\varphi(n) \geq n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$ alors :

$$\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n$$

donc (comme $n \in \mathbb{N}$) il vient $\varphi(n+1) \geq n+1$. Comme $\varphi(0) \geq 0$, on peut conclure par récurrence.

Définition 8 Soit (u_n) une suite dans un espace vectoriel normé. Une suite extraite de (u_n) est une suite de la forme $(u_{\varphi(n)})$ où φ est une extraction.

Théorème 3

Soit une suite (u_n) convergente vers ℓ dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$. Alors toute suite extraite de (u_n) converge aussi vers ℓ .

Exercice 7

Démontrer le théorème 3.

Soit φ une extraction.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite (u_n) converge vers ℓ , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait : $d(u_n, \ell) \leq \varepsilon$.

Ainsi, pour tout $n \geq N$, comme $\varphi(n) \geq n$, il vient : $d(u_{\varphi(n)}, \ell) \leq \varepsilon$.

Remarque 1.7

Soient (u_n) et (v_n) deux suites dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ qui convergent respectivement vers $u \in E$ et $v \in E$. Alors, pour tout α et β dans $\mathbb{K}$, la suite $(\alpha u_n + \beta v_n)$ converge vers $\alpha u + \beta v$.

Exercice 8

On pose $E = \mathbb{R}[X]$. Soit $P \in E$. Trouver une norme sur E telle que ;

$$X^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $Q_n = \begin{cases} X^n & \text{si } n \leq \deg P \\ X^n - P & \text{sinon} \end{cases}.$

La famille $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

Ainsi, pour tout $R \in \mathbb{R}[X]$ il existe une suite presque nulle $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$

telle que $R = \sum_{n=0}^{+\infty} r_n Q_n$ et on pose : $\|R\| = \frac{1}{2^n} \max_{n \in \mathbb{N}} |r_n|.$

On a alors une norme sur $\mathbb{R}[X]$ et il vient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|X^n - P\| = \|Q_n\| = \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

1.7 Normes équivalentes

Définition 9 Soient $\|\cdot\|$ et N des normes sur un espace vectoriel E . On dit que la norme $\|\cdot\|$ est équivalente à la norme N lorsqu'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que :

$$\alpha N \leq \|\cdot\| \leq \beta N,$$

i.e. pour tout v dans E : $\alpha N(v) \leq \|v\| \leq \beta N(v).$

Remarque 1.8

1. Lorsque $\|\cdot\|$ et N sont deux normes équivalentes sur E alors **elles ont les mêmes bornés et les mêmes suites convergentes**.
2. Pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes, on peut penser à chercher une suite dans E qui converge pour une des normes et qui ne converge pas pour l'autre norme.

Exercice 9

Sur $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ montrer que les normes $\|\cdot\|_1 : f \mapsto \int_0^1 |f|$ et $\|\cdot\|_\infty : f \mapsto \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ ne sont pas équivalentes.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère $f_n : x \mapsto x^n$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}$ et $\|f_n\|_\infty = 1$.

Cela interdit l'existence d'une constante $\beta > 0$ telle que $\|\cdot\|_\infty \leq \beta \|\cdot\|_1$.

Théorème 4

Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

2 Continuité des fonctions entre espaces vectoriels normés

2.1 Continuité en un point

Définition 10 Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, $a \in A$ une partie de E , $f : A \rightarrow F$.

1. On dit que f est continue en a lorsque

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in A)(\|x - a\|_E \leq \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_F \leq \varepsilon).$$

2. On dit que f est continue sur A si f est continue en tout point de A . On note $C^0(A, F)$ l'ensemble des applications continues de A dans F .

Remarque 2.1

1. Avec les notations de la définition, si f est continue a alors f est bornée au voisinage de a : il existe $r > 0$ tel que f soit bornée sur $A \cap B(a, r)$.
2. La notion de continuité en un point est locale : par exemple, avec les notations de la définition, f est continue en a si et seulement s'il existe $r > 0$ tel que la restriction de f à $V = A \cap B(a, r)$ soit continue en a .
3. La norme d'un espace vectoriel normé est continue, les applications coordonnées de $\mathbb{R}^n$ sont continues sur $\mathbb{R}^n$ (muni de $\|\cdot\|_2$ pour l'instant).

Théorème 5 (Caractérisation séquentielle de la continuité)

Soient $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, $a \in A$ une partie de E , $f : A \rightarrow F$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (i) f est continue en a .
- (ii) Pour toute suite (x_n) dans A telle que $x_n \xrightarrow{+\infty} a$ on a $f(x_n) \xrightarrow{+\infty} f(a)$.

Démonstration.

• On suppose que f est continue en a .

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in E$ tel que $\|x - a\|_E \leq \alpha$ on ait $\|f(x) - f(a)\|_F \leq \varepsilon$.

Soit (x_n) dans A telle que $x_n \xrightarrow{+\infty} a$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait :

$$\|x_n - a\|_E \leq \alpha.$$

Ainsi, si $n \geq N$ il vient : $\|f(x_n) - f(a)\|_F \leq \varepsilon$.

• On suppose que pour toute suite (x_n) dans A telle que $x_n \xrightarrow{+\infty} a$ on a $f(x_n) \xrightarrow{+\infty} f(a)$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que l'on n'a pas $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$.

Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que :

$$(\forall \alpha > 0)(\exists x_\alpha \in E)(\|x_\alpha - a\| \leq \alpha \text{ et } \|f(x_\alpha) - f(a)\|_F > \varepsilon).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha = 2^{-n}$, il existe donc $x_n \in E$ tel que $\|x_n - a\|_E \leq 2^{-n}$ et $\|f(x_n) - f(a)\|_F > \varepsilon$.

On a ainsi construit une suite (x_n) dans E telle que $x_n \xrightarrow{+\infty} a$ mais qui ne vérifie pas $f(x_n) \xrightarrow{+\infty} f(a)$: c'est absurde.

□

2.2 Applications lipschitziennes

Définition 11 Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E , $f : A \rightarrow F$ et $k \in \mathbb{R}^+$. On dit que f est k -lipschitzienne si pour tout $(x, y) \in A^2$ on a :

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq k \|x - y\|_E.$$

Théorème 6

Toute fonction lipschitzienne entre espace vectoriel normé est continue

Exercice 10

Démontrer le théorème 6.

2.3 Opérations classiques sur les fonctions continues.

Théorème 7

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace vectoriel normés.

1. Toute combinaison linéaire de fonctions continues sur A est continue sur A : $C^0(A, F)$ est un sous-espace vectoriel de F^A .
2. Le produit de deux fonctions continues sur A à valeurs dans $\mathbb{K}$ est encore une fonction continue sur A .
3. Sous réserve d'existence, le quotient de deux fonctions continues sur A à valeurs dans $\mathbb{K}$ est une fonction continue sur A .
4. **Composition.** Si f est continue, si B est une partie de F contenant $f(A)$ si $g : B \rightarrow G$ est continue où G est un espace vectoriel normé, alors $g \circ f$ est continue.

Remarque 2.2

En particulier les fonctions polynomiales et les quotients de fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}^n$ (lorsque...) sont continues.

3 Applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés

3.1 Le théorème fondamental

Théorème 8

Soient E et F des espaces vectoriels normés avec $E \neq \{0\}$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (1) f est continue.
- (2) f est lipschitzienne.
- (3) $(\exists M \geq 0)(\forall x \in E)(\|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E)$.

Exercice 11

Démontrer le théorème 8.

Exercice 12

On pose $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P \in E$, il existe une suite (a_n) presque nulle telle que $P = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ et on pose $\|P\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$.

Démontrer que $D : P \mapsto P'$ n'est pas continue.

Supposons que D soit continue. Il existe donc $M \in \mathbb{R}^+$ telle que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ on ait :

$$\|D(P)\| \leq \|P\|.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en prenant $P = X^n$, il vient $\|nX^{n-1}\| \leq M \|X^n\|$ i.e. $n \leq M$, ce qui est stupide.

Exercice 13

Avec les notations du théorème 8, démontrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (i) f n'est pas continue.
- (ii) Il existe une suite (x_n) dans E telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\|f(x_n)\|_F = 1$ et $x_n \xrightarrow{+\infty} 0$.
- (iii) Il existe une suite (y_n) dans la sphère unité de E telle que $\|f(y_n)\|_F \xrightarrow{+\infty} +\infty$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Si (ii) est vraie, f n'est pas continue en 0 (caractérisation séquentielle de la continuité).

(i) $\Rightarrow$ (iii) On suppose que f n'est pas continue. Selon le point 8 du théorème 8, en prenant la négation :

$$(\forall M \geq 0)(\exists x \in E)(\|f(x)\|_F > M \|x\|_E).$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe x_n dans E tel que $\|f(x_n)\|_F > n \|x_n\|_E$ (et ainsi $x_n \neq 0$).

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|_E}$. Il vient, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|y_n\|_E = 1 \text{ et } \|f(y_n)\|_F > n \xrightarrow{+\infty} +\infty$$

(iii) $\Rightarrow$ (ii) On suppose qu'il existe une suite (y_n) dans la sphère unité de E telle que $\|f(y_n)\|_F \xrightarrow{+\infty} +\infty$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$\lambda_n = \|f(y_n)\|_F$ et, quitte à extraire, on peut supposer que $\lambda_n > 0$.

On pose encore, si $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \frac{y_n}{\lambda_n}$ de sorte que $\|x_n\| = \frac{1}{\lambda_n} \xrightarrow{+\infty} 0$ et $\|f(x_n)\|_F = 1$. $\square$

3.2 Normes d'opérateurs (compléments hors programme)

Définition 12 Soient E et F des espaces vectoriels normés avec $E \neq \{0\}$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Pour $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$, espace des applications linéaires continues de E dans F , on note :

$$\|f\| = \sup_{x \in S_E} \|f(x)\|_F.$$

Remarque 3.1

Noter que si $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$, $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$, selon le point 8 du théorème 8, il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \in E$ on ait $\|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E$.

Ainsi, pour tout $x \in S_E = \{x \in E \mid \|x\|_E = 1\}$, $\|f(x)\|_F \leq M$, donc $\{\|f(x)\|_F \mid x \in S_E\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, ce qui assure que $\|f\|$ est correctement définie dans $\mathbb{R}$.

Exercice 14

Soit $\alpha > 0$. Démontrer que :

$$\|f\| = \sup \left\{ \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \mid x \in E \setminus \{0\} \right\} = \sup \left\{ \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \mid x \in \overline{B}(0, \alpha) \setminus \{0\} \right\},$$

où $\overline{B}(0, \alpha)$ désigne la boule fermée de centre 0_E et de rayon α .

- D'après la remarque 3.1, $\sup \left\{ \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \mid x \in E \setminus \{0\} \right\}$ existe bien dans $\mathbb{R}^+$.

Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Alors $x/\|x\|_E$ est dans S_E donc on a :

$$\|f(x/\|x\|_E)\|_F \leq \|f\|,$$

et ainsi $\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq \|f\|$ donc $\sup \left\{ \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \mid x \in E \setminus \{0\} \right\} \leq \|f\|$.

- Comme $S_E \subset E \setminus \{0\}$, $\sup_{x \in S_E} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq \sup \left\{ \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \mid x \in E \setminus \{0\} \right\}$,
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{=\|f\|}$

ce qui démontre donc l'égalité :

$$\|f\| = \sup \left\{ \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \mid x \in E \setminus \{0\} \right\}.$$

- On a $\overline{B}(0, \alpha) \setminus \{0\} \subset E \setminus \{0\}$ donc :

$$\sup \left\{ \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \mid x \in \overline{B}(0, \alpha) \setminus \{0\} \right\} \leq \sup \left\{ \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \mid x \in E \setminus \{0\} \right\} = \|f\|.$$

- Si maintenant (x_n) est une suite dans S_E telle que $\|f(x_n)\|_F \xrightarrow{+\infty}$
 $\|f\|$, la suite $(\alpha x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dans $B(0, \alpha) \setminus \{0\}$ et

$$\frac{\|f(\alpha x_n)\|_F}{\|\alpha x_n\|_E} = \|f(x_n)\|_F \xrightarrow{+\infty} \|f\|$$

$$\text{donc : } \sup \left\{ \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \mid x \in \overline{B}(0, \alpha) \setminus \{0\} \right\} = \|f\|.$$

Remarque 3.2

Avec les notations ci-dessus, pour $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$ on a, d'après l'exercice 14, pour tout $x \in E$:

$$\|f(x)\|_F \leq \|f\| \|x\|_E.$$

De plus $\|f\|$ est le plus petit réel M tel que pour tout $x \in E$: $\|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E$.

Théorème 9

Avec les notations de la définition 12, si de plus G est un espace vectoriel normé et si $g \in \mathcal{L}_c(F, G)$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}_c(E, G)$ et :

$$\|g \circ f\| \leq \|g\| \|f\|.$$

Exercice 15

Démontrer le théorème 9

Soit $x \in E$. On a : $\|g \circ f(x)\|_G \leq \|g\| \|f(x)\| \leq \|g\| \|f\| \|x\|_E$.

Ainsi pour tout x non nul dans E : $\frac{\|g \circ f(x)\|_G}{\|x\|_E} \leq \|g\| \|f\|$.

Il en résulte que $\|g \circ f\| \leq \|g\| \|f\|$.

Exercice 16

On considère $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ et pour f dans E on pose :

$$F_f = \begin{pmatrix} [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_0^x f \end{pmatrix}.$$

$$\text{Soit } \varphi = \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & F_f \end{pmatrix}.$$

1. On munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Démontrer que φ est continue et trouver $\|\varphi\|$.
2. On munit E de la norme $\|\cdot\|_1$. Démontrer que φ est continue et trouver $\|\varphi\|$.

1. • On peut vérifier sans peine que φ est linéaire, et le théorème fondamental assure que pour tout f dans E , $\varphi(f)$ est de classe C^1 , donc dans E .

- Pour tout $f \in E$ et tout $x \in [0, 1]$ on a :

$$|\varphi(f)(x)| = \left| \int_0^x f \right| \leq \int_0^x \underbrace{|f|}_{\leq \|f\|_\infty} \leq x \|f\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

Ainsi $\|\varphi(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ ce qui assure la continuité de φ et démontre que $\|\varphi\| \leq 1$.

- Avec $f_0 : x \mapsto 1$ on a $\varphi(f_0) = f_0$ donc $\|\varphi(f_0)\|_\infty = \|f_0\|_\infty$ et ainsi $\|\varphi\| = 1$.

2. • Pour tout f dans E on a :

$$\begin{aligned}\|\varphi(f)\|_1 &= \int_0^1 |\varphi(f)| = \int_0^1 \left| \int_0^x f(t) dt \right| dx \\ &\leq \int_0^1 \underbrace{\left(\int_0^x |f(t)| dt \right)}_{\leq \|f\|_1} dx \\ &\leq \|f\|_1\end{aligned}$$

Ainsi φ est bien continue de $(E, \|\cdot\|_1)$ dans lui même et on a $\|\varphi\| \leq 1$.

• On a beaucoup de mal à trouver une fonction f dans E telle que $\|\varphi(f)\|_1 = \|f\|_1$.

On cherche alors une suite (f_n) de fonctions dans E telle que :

$$\begin{cases} \|f_n\|_1 = 1 & \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \\ \|\varphi(f_n)\|_1 \xrightarrow{+\infty} 1 \end{cases}$$

Après quelques tests je prends la fonction f_n donnée par la figure 3.

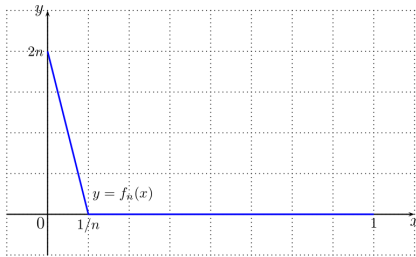


FIGURE 3 – La fonction f_n dans la sphère unité de $(E, \|\cdot\|_1)$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\|\varphi(f_n)\|_1 &= \int_0^1 \left(\int_0^x f_n(t) dt \right) dx \\ &= \int_0^{1/n} \underbrace{\left(\int_0^x f_n(t) dt \right)}_{\leq \|f_n\|_1 = 1} dx + \int_{1/n}^1 \underbrace{\left(\int_0^x f_n(t) dt \right)}_{=1} dx \\ &= O\left(\frac{1}{n}\right) + 1 - \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1\end{aligned}$$

Exercice 17

On considère $E = \mathbb{C}^n$ et une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est considérée comme un endomorphisme de E .

1. Dans le cas où E est muni de $\|\cdot\|_\infty$, démontrer que $A \in \mathcal{L}_c(E)$ et déterminer $\|A\|$.
2. Dans le cas où E est muni de $\|\cdot\|_1$, démontrer que $A \in \mathcal{L}_c(E)$ et déterminer $\|A\|$.

Notons qu'il est tout de même maladroit, d'un point de vue pédagogique, de considérer une matrice comme un endomorphisme de E : c'est plutôt un endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

1. • Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$. On a pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$|(Ax)_i| = \left| \sum_{j=1}^n (A)_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |(A)_{i,j}| \underbrace{|x_j|}_{\leq \|x\|_\infty} \leq \left(\sum_{j=1}^n |(A)_{i,j}| \right) \|x\|_\infty.$$

$$\text{Ainsi } \|Ax\|_\infty \leq \underbrace{\left(\max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |(A)_{i,j}| \right) \right)}_{\text{indépendant de } x} \|x\|_\infty.$$

$$\text{Il en résulte que } A \text{ est continu avec } \|A\| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |(A)_{i,j}| \right)$$

Noter que $\sum_{j=1}^n |(A)_{i,j}|$ est la somme des modules des coefficients de la ligne i de la matrice A .

- On considère un indice $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que

$$\sum_{j=1}^n |(A)_{i_0,j}| = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |(A)_{i,j}| \right).$$

Pour tout j dans $\{1, \dots, n\}$ on écrit $(A)_{i_0,j} = \rho_j u_j$ où $\rho_i = |(A)_{i_0,j}|$ et u_j est un complexe de module 1. On considère alors le vecteur $x = (\overline{u_1}, \dots, \overline{u_n}) \in \mathbb{C}^n$ et il vient :

$$|(Ax)_{i_0}| = \left| \sum_{j=1}^n |(A)_{i_0,j}| \underbrace{u_j \overline{u_j}}_{=1} \right| = \sum_{j=1}^n |(A)_{i_0,j}|$$

donc $\|Ax\|_\infty \geq \sum_{j=1}^n |(A)_{i_0,j}|$ ce qui permet de conclure que :

$$\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |(A)_{i,j}| \right).$$

2. • Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$. On a :

$$\begin{aligned} \|Ax\|_1 &= \sum_{i=1}^n |(Ax)_i| = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n (A)_{i,j} x_j \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |(A)_{i,j}| |x_j| = \sum_{j=1}^n |x_j| \sum_{i=1}^n |(A)_{i,j}| \end{aligned}$$

En notant $M = \max_{1 \leq j \leq 1} \left(\sum_{i=1}^n |(A)_{i,j}| \right)$, qui est indépendant de X , il vient donc :

$$\|Ax\|_1 \leq M \|x\|_1.$$

Ainsi A est bien continu et $\|A\| \leq M = \max_{1 \leq j \leq 1} \left(\sum_{i=1}^n |(A)_{i,j}| \right)$.

- On cherche (trouve!) maintenant un vecteur x de $\mathbb{C}^n$ tel que $\|Ax\|_1 = M \|x\|_1$ ce qui permet de conclure que $\|A\| = M$.

4 Espaces vectoriels normés de dimension finie

4.1 Suites convergentes dans un espace vectoriel de dimension finie

Théorème 10

Soit $\beta = (e_1, \dots, e_p)$ une base d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ de dimension finie et (u_n) une suite dans E . Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on écrit $u_n = \sum_{k=1}^p x_k(n) e_k$.

Pour $\ell = \sum_{k=1}^p \ell_k e_k \in E$, les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (1) La suite (u_n) converge vers ℓ dans $(E, \|\cdot\|)$.
- (2) Pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$, la suite $(x_k(n))$ converge vers ℓ_k dans $\mathbb{K}$.

Démonstration. On pose, pour $x = \sum_{k=1}^p x_k e_k$ dans E : $N_1(x) = \sum_{k=1}^p |x_k|$. Les normes N_1 et $\|\cdot\|$ sont équivalentes, ce qui donne de suite le résultat souhaité. $\square$

4.2 Continuité en dimension finie

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé, $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, $A \subset E$, $f : A \rightarrow F$. Lorsque $\beta = (e_1, \dots, e_p)$ est une base de F , pour tout x dans E on peut écrire :

$$f(x) = \sum_{i=1}^p f_i(x) e_i,$$

où $f_i(x)$ est la i -ième coordonnées de $f(x)$ dans β . Cela définit des applications $f_i : E \rightarrow \mathbb{K}$ appelés les composantes de f dans β , et on écrit :

$$f = (f_1, \dots, f_p).$$

Théorème 11

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé, $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, $a \in A \subset E$, $f : A \rightarrow F$. Soient $\beta = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F « dans laquelle on écrit » on écrit $f = (f_1, \dots, f_p)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(1) f est continue en a .

(2) Pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$, la fonction f_k est continue en a .

Démonstration. On pose, pour $x = \sum_{k=1}^p x_k e_k$ dans E : $N_1(x) = \sum_{k=1}^n |x_k|$. Les normes N_1 et $\| \cdot \|$ sont équivalentes, ce qui donne de suite les résultats souhaités. $\square$

4.3 Continuité des applications linéaires, multilinéaires et polynômes

Théorème 12

Soient $(E, \| \cdot \|_E)$ un espace vectoriel normé **de dimension finie**, $(F, \| \cdot \|_F)$ un espace vectoriel normé, $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors f est continue.

Démonstration. Soit $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Pour x dans E écrit

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \text{ dans la base } \beta, \text{ on pose : } N_1(x) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|.$$

On a ainsi définie une norme sur E . On a alors, pour tout $x \in E$, écrit

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i :$$

$$\|f(x)\|_F = \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i f(e_i) \right\|_F \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \underbrace{\|f(e_i)\|_F}_{\leq M},$$

où $M = \max_{1 \leq i \leq n} \|f(e_i)\|_F$.

Ainsi $\|f(x)\|_F \leq M \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leq M N_1(x)$: l'application f est M -lipschitzienne donc continue de (E, N_1) dans $(F, \| \cdot \|_F)$.

Enfin $\| \cdot \|$ est équivalente à N_1 : il existe donc $B > 0$ tel que $N_1 \leq B \| \cdot \|_E$ donc f est également lipschitzienne (donc continue) de $(E, \| \cdot \|_E)$ dans $(F, \| \cdot \|_F)$ $\square$

Définition 13 Soient $E_1, \dots, E_p$ des espaces vectoriels. Une application $f : E_1 \times \dots \times E_p$ est dite p -linéaire lorsque pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$ et tout $(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$ l'application :

$$f_i : x \mapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_p)$$

est linéaire de E_i dans F .

Théorème 13

On reprend les mêmes notations que dans la définition 13. Lorsque les E_i sont tous de dimension finie, les applications p -linéaires sont continues.

Remarque 4.1

Le produit matriciel $(A, B) \mapsto AB$ est continue.

Exercice 18

Justifier la phrase suivante : « localement le rang ne peut qu'augmenter ».