Composition n° 2, une correction

Exercice 1

Partie I - Résultats généraux sur les matrices stochastiques et illustrations

1. a) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

On a alors $AV = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{p} a_{1,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{p} a_{p,j} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Ainsi : $AV = V \Leftrightarrow (\forall i \in \{1,\dots,p\}) \left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} = 1 \right)$.

Conclusion. Pour tout $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$: $\quad A \in \mathcal{ST}_p \iff \begin{cases} \forall (i,j) \in \{1,\dots,p\}^2,\ (A)_{i,j} \geqslant 0 \\ AV = V. \end{cases}$

b) Soit $A \in \mathcal{ST}_p$. Selon la question précédente, $AV = V$. Comme $V \neq 0$, on peut conclure que 1 est valeur propre de A.

c) Soit (A_n) une suite dans $\mathcal{ST}_p$ qui converge vers A dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

— Comme les coefficients des matrices A_n sont positifs, par passage à la limite les coefficients de A sont des réels positifs.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $A_n V = V$. Mais l'application $M \mapsto MV$ est continue de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ (comme application linéaire en dimension finie). Ainsi $A_n V \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} AV$. Par unicité de la limite, il vient $AU = U$.

Selon la question 1a, on peut dire que $A \in \mathcal{ST}_p$ et alors $\mathcal{ST}_p$ est fermé dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

2. Soient A et B dans $\mathcal{ST}_p$. On a alors $(AB)V = A(BV) = AV = V$. Comme les coefficients de A et B sont positifs, ceux de la matrice AB le sont aussi. Selon la question 1a, la matrice AB est dans $\mathcal{ST}_p$.
Conclusion. $\boxed{\forall A, B \in \mathcal{ST}_p, \quad AB \in \mathcal{ST}_p}$.

3. a) • Comme A_1 est triangulaire inférieure, ses valeurs propres sont évidence sur sa diagonales : elles sont égales à 1/3, 1 : 2 et 1.

• Comme A_1 est une matrice de taille 3 avec trois valeurs propres distinctes, la dimensions des sous-espaces propres associés est 1.

b) • Pour λ réel on a, (déterminant par blocs) :

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A_2) &= (\lambda - 1)\left((\lambda - 1/2)^2 - 1/4\right) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda) \\ &= \lambda(\lambda - 1)^2 \end{aligned}$$

Les valeurs propres de A_2 sont donc 0 et 1.

• La matrice A_2 est de rang 2 donc la dimension de l'espace propre associé à 0 est 1. Comme les deux dernières colonnes de A_2 sont égales, on a donc :

$$\ker A_2 = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

• Puis la matrice $A_2 - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ est de rang 1 : le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est donc de dimension 2. Comme la première colonne de $A_2 - I$ est nulle et que ses deux dernières colonnes sont opposées, il vient :

$$\ker(A_2 - I) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

c) L'affirmation « Pour tout élément A de $\mathcal{ST}_3$, le sous-espace propre pour A associé à la valeur propre 1 est de dimension 1 » est grossièrement fausse : prendre la matrice identité comme contre-exemple.

4. a) Comme X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ, on a $AX = \lambda X$. Ainsi, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ on a :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{k,j} x_j = \lambda x_k.$$

En particulier, lorsque $k = i$, il vient $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j = \lambda x_i$, donc :

$$|\lambda x_i| \underbrace{\leqslant}_{IT} \sum_{j=1}^{p} |a_{i,j} x_j| = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} \underbrace{|x_j|}_{\leqslant |x_i|} \leqslant |x_i| \underbrace{\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}}_{=1} = |x_i|.$$

Conclusion. $\boxed{\text{On a : } |\lambda x_i| \leqslant |x_i|}$.

b) Supposons que $|x_i| = 0$. On a alors (par définition de l'indice i), pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$, $|x_k| \leqslant 0$; donc $x_k = 0$. Ainsi $X = 0$, ce qui est stupide, puisque X est un vecteur propre.
Ainsi $|x_i| \neq 0$. Mais d'après la question précédente, on a : $|\lambda|\,|x_i| \leqslant |x_i|$, d'où $\boxed{|\lambda| \leqslant 1}$.

Partie II - Suites de moyennes de puissances de matrices stochastiques

5. a) Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ on ait $A^n \in \mathcal{ST}_p$. Comme $A \in \mathcal{ST}_p$, on peut alors dire, selon la question 2 de la partie I, que la matrice $A^{n+1} = A^n A$ est stochastique. Comme $A^0 = I \in \mathcal{ST}_p$, on peut conclure par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $A^n \in \mathcal{ST}_p$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $C_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} A^k$. Pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, la matrice A^k est stochastique selon la question précédente donc ses coefficients sont positifs. Les coefficients de C_n sont donc positifs.
Puis on a :

$$\underline{C_n V} = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} A^k\right) V = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} A^k V = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} V = \underline{V}.$$

Conclusion. $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} A^k \in \mathcal{ST}_p}$.

6. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \leqslant 1$. Distinguons trois cas.

• Si $|x| < 1$, la série géométrique $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} x^n$ converge de somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Il en résulte que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x^k \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

• Si $x = 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x^k = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

• Si $x = -1$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sum_{k=0}^{n-1} x^k \in \{0, 1\}$, donc : $\dfrac{1}{n}\left|\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right| \leqslant \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Conclusion. $\boxed{\dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x^k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \neq 1. \end{cases}}$

7. • On a $D = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r})$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$D^k = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, \lambda_1^k, \ldots, \lambda_{n-r}^k).$$

Il vient alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n = \mathrm{diag}\left(1, \ldots, 1, \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_1^k, \ldots, \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_{n-r}^k\right)$.

Mais si $i \in \{1, \ldots, n-r\}$, λ_i est une valeur propre de la matrice stochastique A, distincte de 1, donc $|\lambda_i| \leqslant 1$ selon la question 4b. Selon la question précédente, pour tout $i \in \{1, \ldots, n-r\}$ on a :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_i^k \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Il en résulte que $M_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} \Delta$.

• Par continuité du produit matriciel il vient : $B_n = PMP^{-1} \underset{+\infty}{\longrightarrow} P\Delta P^{-1} = B$.

Commentaire. On ne précise pas la norme choisie sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ puisqu'elle sont « équivalentes » (dimension finie).

8. a) Important Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$B_n = PM_nP^{-1} = P\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D^k\right)P^{-1} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} PD^kP^{-1} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(PDP^{-1}\right)^k = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} A^k$$

On peut alors conclure grâce à la question 5b.

Conclusion. $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad B_n \in \mathcal{ST}_p}$.

b) On a vu (question 1c) que ST_p est un fermé de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Ainsi $B \in ST_p$

Exercice 2

Partie I - Applications linéaires

1. Fait en cours.

2. Soit $f \in E$. On a : $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 \underbrace{|f(t)|}_{\leqslant \|f\|_\infty} \mathrm{d}t \leqslant \|f\|_\infty$ et ainsi $M = 1$ convient.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$ on considère l'élément de E défini par $f_n(t) = t^n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\|f\|_1 = \dfrac{1}{n+1}$ et $\|f_n\|_\infty = 1$. S'il existe une constante $\beta > 0$ telle que $\| \ \|_\infty \leqslant \beta \| \ \|_1$ alors ou aura pour tout $n \in \mathbb{N}$: $1 \leqslant \dfrac{\beta}{n+1} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui est profondément stupide.

Conclusion. Les normes $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

4. Soit $f \in E$. On a :
$$|\Phi(f)| \leqslant \int_0^1 |f(t)| \, \mathrm{d}t \leqslant \|f\|_\infty .$$
D'après la caractérisation des applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés, φ est continue.

5. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :
$$\|f_n\|_1 = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
et ainsi $f_n \overset{\| \ \|_1}{\longrightarrow} 0$.
Mais pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a également :
$$\psi(f_n) = \sqrt{n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$
Cela met en défaut la caractérisation séquentielle de la continuité en 0 : ψ n'est pas continue.

(b) Pour tout f dans E on a :
$$|\Psi(f)| = |f(1)| \leqslant \|f\|_\infty ,$$
donc Ψ est continue de $(E, \| \ \|_\infty)$ dans $(\mathbb{R}, | \ |)$.

Partie II - Densité de $GL_n(\mathbb{R})$

6. On considère, pour $p \in \mathbb{N}$, la matrice $M_p = \dfrac{1}{2^p} I_n$ qui est un élément de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
Comme $M_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on peut conclure que l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

7. • La matrice M admet un nombre fini de valeurs propres : il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geqslant N$ on ait : $M_p = M - \dfrac{1}{2^p} I \in GL_n(\mathbb{R})$.

• Comme $M_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} M$, on peut dire que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et limite d'une suite de matrices dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$: l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

8. **Application**
a) Soit λ réel. On a :
$$\begin{aligned} \det(\lambda I - AB) &= \det(\lambda A I A^{-1} - ABAA^{-1}) = \det\left(A(\lambda I - BA)A^{-1}\right) \\ &= \det(A)\det(\lambda I - BA)\det(A^{-1}) = \det(A)\det(\lambda I - BA)(\det A)^{-1} \\ &= \det(\lambda I - BA) \end{aligned}$$

b) On suppose maintenant que A n'est plus inversible. Par densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une suite (A_p) de matrices inversibles telle que :
$$A_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} A.$$
Par continuité des applications $M \mapsto MB$ et $M \mapsto BM$ (car linéaires en dimension finie), on a :
$$\begin{cases} A_p B \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} AB \\ B A_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} BA \end{cases}$$
Ainsi, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé, il vient (en regardant ce qui se passe coefficient par coefficient) :
$$\begin{cases} \lambda I - A_p B \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda I - AB \\ \lambda I - B A_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda I - BA \end{cases}$$

Le déterminant étant une application continue :

$$\begin{cases} \det(\lambda I - A_p B) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \det(\lambda I - AB) \\ \det(\lambda I - B A_p) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \det(\lambda I - BA) \end{cases}$$

Mais d'après la question précédente, pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a $\det(\lambda I - A_p B) = \det(\lambda I - B A_p)$. Par **unicité de la limite** il vient alors : $\det(\lambda I - AB) = \det(\lambda I - BA)$.

Exercice 3

Partie I - Résultats généraux et exemple

1. a) • Soient M et N dans $\mathbb{E}$ ainsi que λ réel. Tout d'abord $\mathrm{ad}_A(M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Puis on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_A(M+\lambda N) &= [A, M+\lambda N] \\ &= A(M+\lambda N) - (M+\lambda N)A \\ &= AM - MA + \lambda(AN - NA) \\ &= \mathrm{ad}_A(M) + \lambda \mathrm{ad}_A(N) \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\mathrm{ad}_A \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{E}}$.

• Puis on a $\mathrm{ad}_A(I_n) = 0$. Ainsi $\ker \mathrm{ad}_A$ est non réduit à 0. L'endomorphisme ad_A n'est pas injectif.

b) Soit $M \in \mathrm{ad}_A$. Il existe alors $N \in \mathbb{E}$ tel que $M = \mathrm{ad}_A(N) = AN - NA$ et ainsi, par linéarité de la trace :

$$\mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(AN) - \mathrm{tr}(NA) = 0.$$

Conclusion. $\mathrm{Im}\,\mathrm{ad}_A \subset \ker \mathrm{tr}$.

2. Prenons $M \in \ker \mathrm{tr} \cap \mathrm{vect}(I)$. On a alors $\mathrm{tr}(M) = 0$ et il existe λ réel tel que $M = \lambda I$. Il vient donc :

$$0 = \mathrm{tr}(M) = n\lambda$$

ce qui assure que $\lambda = 0$ et donc $M = 0$. On a alors $\ker \mathrm{tr} \cap \mathrm{vect}(I) = \{0\}$ et donc la somme $\ker \mathrm{tr} + \mathrm{vect}(I)$ est directe.
Puis le théorème du rang appliqué à la forme linéaire tr donne $\dim \ker \mathrm{tr} = n^2 - 1$ et on a alors :

$$\dim \ker \mathrm{tr} + \dim \mathrm{vect}(I) = n^2 - 1 + 1 = n^2 = \dim \mathbb{E}$$

ce qui assure que $\mathbb{E} = \ker \mathrm{tr} \oplus \mathrm{vect}(I)$.

3. a) Des petits calculs (à mettre sur la copie) montrent que $\mathrm{ad}_A(V_1) = -V_2 + V_3$, $\mathrm{ad}_A(V_2) = -V_1 + V_4$, $\mathrm{ad}_A(V_3) = V_1 - V_3$ et $\mathrm{ad}_A(V_4) = V_2 - V_3$. La matrice T de l'endomorphisme ad_A dans la base (V_1, V_2, V_3, V_4) est donc

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) On trouve (sans souci) que $T^3 = 4T$.

c) **Question importante qui sera un résultat de cours**
Supposons que λ soit valeur propre de T. Il existe alors $C \in \mathcal{M}_n(n, 1(\mathbb{C})$ vecteur colonne **non nul** tel que $TC = \lambda C$. On a alors $T^2C = \lambda^2$ et $T^3C = \lambda^3 C$.
Comme $T^3 - 4T = 0$, il vient $T^3C - 4TC = 0$ d'où $(\lambda^3 - 4\lambda)C = 0$. Comme C est une colonne non nulle, on obtient $\lambda^3 - 4\lambda = 0$. Ainsi λ est bien racine du polynôme $X^3 - 4X$.

d) On trouve $TX_1 = 2X_1$ et $TX_2 = -2X_2$

e) • On a vu que les valeurs propres de T sont racines de $X^3 - 4X$ donc :

$$\mathrm{Spec}(T) \subset \{-2, 0, 2\}$$

• Pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ on a : $TX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -y + z = 0 \\ -x + t = 0 \\ x - t = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y + z = 0 \\ -x + t = 0 \end{cases}$.

Ainsi 0 est valeur propre de T et le sous-espace propre associé, $\ker T$, est de dimension 2. De plus $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ forment une base de $\ker T$.

• La question précédente affirme que -2 et 2 sont aussi valeurs propres, et puisque $\ker t$ est de dimension 2, les sous-espaces propres associés à -1 et 2 sont des droites vectorielles :

$$\ker(T - 2I) = \mathrm{vect}(X_1) \quad \text{et} \quad \ker(T + 2I) = \mathrm{vect}(X_2).$$

Partie 2 - Etude d'un sous-espace propre de ad_A associé à une valeur propre non nulle

4. Pour $k = 0$ et $k = 1$, c'est évident. Supposons que $\mathrm{ad}_A(M^k) = k\mu M^k$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$. On a alors :

$$\begin{aligned} AM^{k+1} &= (AM^k)M = \big(\mathrm{ad}_A(M^k) + M^k A\big)M \\ &= (k\mu M^k - M^k A)M = k\mu M^{k+1} - M^k AM = k\mu M^{k+1} - M^k \underbrace{(-\mathrm{ad}_A(M) - MA)}_{=-\mu M - MA} \\ &= (k+1)\mu M^{k+1} + M^{k+1}A \end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{ad}_A(M^{k+1}) = (k+1)\mu M^{k+1}$.
Par récurrence, on peut donc affirmer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a : $\mathrm{ad}_A(M^k) = k\mu M^k$.

5. On raisonne par l'absurde et on suppose que pour tout $q \geqslant 1$ on a $M^q \neq 0$. D'après la question précédente, $q\mu$ est alors une valeur propre de ad_A, et ce pour tout $q \geqslant 1$ entier. Ainsi ad_A, qui est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, admet une infinité de valeurs propres (puisque μ est non nul) : c'est profondément stupide !

Conclusion. Il existe un entier $q \geqslant 1$ tel que $M^q = 0$.

6. • Comme $M^{p-1} \neq 0$, il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $M^{p-1}X \neq 0$. Montrons alors que la famille $(X, MX, \ldots, M^{p-1}X)$ est libre dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Soient $\alpha_0, \ldots, \alpha_{p-1}$ des réels tels que :

$$\alpha_0 X + \alpha_1 MX + \cdots + \alpha_{p-1}M^{p-1}X = 0 \quad (\spadesuit)$$

En multipliant à gauche par M^{p-1} on obtient : $\alpha_0 \underbrace{M^{p-1}X}_{\neq 0} = 0$, donc $\alpha_0 = 0$.

On multiple alors à gauche dans $(\spadesuit)$ par M^{p-2} pour obtenir $\alpha_1 M^{p-1}X = 0$ d'où $\alpha_1 = 0$.
En itérant ce raisonnement, il vient $\alpha_0 = \ldots = \alpha_{p-1} = 0$: la famille $(X, MX, \ldots, M^{p-1}X)$ est libre.

• Comme $\dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = n$, on obtient $p \leqslant n$.

Partie 3 - Matrices de trace nulle

7. a) • Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E. Pour tout k dans $\{1, \dots, p\}$, il existe $\lambda_k \in \mathbb{k}$ tel que :

$$f(e_k) = \lambda_k e_k.$$

Soit maintenant k dans $\{2, \dots, p\}$. Il existe $\mu \in \mathbb{k}$ tel que $f(e_1 + e_k) = \mu(e_1 + e_k)$.
Comme $f(e_1 + e_k) = f(e_1) + f(e_k) = \lambda_1 e_1 + \lambda_k e_k$, il vient :

$$(\lambda_1 - \mu)e_1 + (\lambda_k - \mu) = 0.$$

Par liberté de (e_1, e_k), on obtient $\mu = \lambda_1 = \lambda_k$. Une application linéaire étant entièrement déterminée sur les éléments d'une base, f est l'homothétie de rapport λ_1.

• L'hypothèse de dimension finie n'est pas indispensable. On suppose E de dimension quelconque. Pour tout x dans E on dispose de λ_x dans $\mathbb{k}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$ et il s'agit de montrer que la fonction $x \mapsto \lambda_x$ est constante sur E. Fixons x non nul dans E. Pour y dans E, on a :

$$f(x + y) = \lambda_x x + \lambda_y y \quad \text{et} \quad f(x + y) = \lambda_{x+y}(x + y).$$

Comme à la question précédente, si (x, y) est libre, il vient $\lambda_y = \lambda_x$.
Si maintenant (x, y) est une famille liée, alors il existe α dans $\mathbb{k}$ tel que :

$$y = \alpha x.$$

Il vient alors $f(y) = \alpha f(x) = \alpha\lambda_x x$ et $f(y) = \lambda_y y = \alpha\lambda_x x$. Comme x est non nul, on obtient : $\alpha\lambda_x = \alpha\lambda_y$. Si maintenant $\alpha = 0$ alors $y = 0$ et on a bien $f(y) = \lambda_x y$. Sinon α est non nul et il vient $\lambda_y = \lambda_x$.

Conclusion. La fonction $x \mapsto \lambda_x$ est bien constante sur E et f est une homothétie.

b) Soit x dans $E \setminus 0$. Par densité de D, il existe alors une suite (x_n) dans E telle que $x_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} x$. Quitte à tronquer la suite (x_n), on peut supposer que $\|x_n\| \geqslant \varepsilon > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puis, pour chaque n dans $\mathbb{N}$, il existe $\lambda_n \in \mathbb{k}$ tel que $f(x_n) = \lambda_n x_n$. Par continuité de f (qui est une application linéaire en dimension finie), on a $f(x_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} f(x)$ donc $\lambda_n x_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} f(x)$. Mais la suite $(\|x_n\|)$ est minorée, et la suite $(\lambda_n x_n)$ est bornée (puisque convergente). Ainsi la suite (λ_n) est bornée dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: elle admet une sous-suite convergente (Bolzano-Weierstrass). Il existe ainsi β extraction telle que $\lambda_{\beta(n)} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \lambda \in \mathbb{R}$. On a alors $\lambda_{\beta(n)} x_{\beta(n)} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \lambda x$. Par unicité de la limite, il vient :

$$f(x) = \lambda x.$$

Ainsi $(x, f(x))$ est lié pour tout x dans E : f est une homothétie d'après la question 7a.

8. a) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M.

• On suppose que f est une homothétie de rapport λ. Comme $\mathrm{tr}(M) = n\lambda$, il vient $\lambda = 0$ de sorte que $f = 0$ et $M = 0$: tout est évident.

• Si maintenant f n'est pas une homothétie, selon la question 7a), il existe $\varepsilon \in \mathbb{k}^n$ tel que $(\varepsilon, f(\varepsilon))$ est libre. On complète cette famille libre en une base γ de $\mathbb{k}^n$ et la matrice de f dans cette base est de la forme :

$$N = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & * & & * \\ \hline 1 & & & \\ 0 & & ? & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array}\right).$$

Comme M et N représentent le même endomorphisme, elles sont semblables.

b) On suppose que toute matrice M de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{k})$ de trace nulle est semblable à une matrice dont tous les termes diagonaux sont nuls. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ de trace nulle. Selon la question précédente, M est semblable à une matrice de la forme :

$$N = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \ell \\ \hline c & R \end{array}\right),$$

où $R \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{k})$, ℓ est une ligne de taille $n-1$ et c une colonne de taille $n-1$. Comme M et de trace nulle, N aussi, puisque M et N sont semblables. Ainsi $\mathrm{tr}(R) = 0$. Il existe donc Q dans $GL_{n-1}(\mathbb{k})$ tel que $S = QRQ^{-1}$ où S est une matrice dans $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{k})$ dont tous les termes diagonaux sont nuls.

On pose $P = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & * & & * \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array}\right)$ qui est inversible d'après la question précédente, d'inverse :

$$P^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & * & & * \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q^{-1} & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array}\right).$$

On a alors :

$$PNP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \ell Q^{-1} \\ Qc & QRQ^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \ell Q^{-1} \\ Qc & S \end{pmatrix},$$

qui est une matrice de trace nulle.

Enfin, pour $n = 1$, toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ de trace nulle est nulle donc semblable à une matrice à diagonale nulle. On peut alors conclure par récurrence.

9. Lorsque $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $M \in \mathbb{E}$, on trouve sans peine que :

$$[D, M] = \begin{pmatrix} 0 & (\lambda_1 - \lambda_2)m_{1,2} & \cdots & \cdots & (\lambda_1 - \lambda_n)m_{1,n} \\ (\lambda_2 - \lambda_1)m_{2,1} & 0 & & & \\ \vdots & & & & \\ (\lambda_n - \lambda_1)m_{n,1} & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit maintenant M une matrice à terme diagonaux nuls, $M = [m_{i,j}]$. On considère $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ distincts dans $\mathbb{R}$ et, pour tout $(i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2$, on pose : $n_{n,j} = \dfrac{m_{i,j}}{\lambda_i - \lambda_j}$, ce qui définit une matrice N de $\mathbb{E}$ telle que $M = [D, N]$.

Conclusion. Toute matrice M de $\mathbb{E}$ à termes diagonaux nuls est un crochet.

10. Si A, B sont dans $\mathbb{E}$ et si $P \in GL_n(\mathbb{k})$, on a alors (petit calcul) :

$$P[A, B]P^{-1} = [PAP^{-1}, PBP^{-1}].$$

Conclusion. Toute matrice semblable à un crochet est un crochet.

11. • Un crochet est bien de trace nulle par propriété de la trace ...

• Une matrice de trace nulle est semblable à une matrice à diagonale nulle (question 8b), donc semblable à un crochet (question 9) donc est un crochet (question 10).

Fin de la correction