Composition n° 2, bis. Une correction

PARTIE I - Norme d'opérateur sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

1. • L'application $\left\{\begin{array}{ccc}\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ X & \mapsto & \|X\|\end{array}\right.$ est continue car elle est 1-lipschitzienne.

L'application $\left\{\begin{array}{ccc}\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \\ X & \mapsto & MX\end{array}\right.$ est continue car elle est linéaire en dimension finie.

Par composition, l'application $f : \left\{\begin{array}{ccc}\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ X & \mapsto & \|MX\|\end{array}\right.$ est continue.

La sphère-unité Σ_n est une partie fermée bornée de l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Du théorème des bornes atteintes, on déduit l'existence de

$$\|M\|_{\text{op}} = \max_{\Sigma_n} f = \max_{X\in\Sigma_n} \|MX\| = \max_{\|X\|=1} \|MX\| \ .$$

• Si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$, posons $Y = \frac{X}{\|X\|}$, alors $Y \in \Sigma_n$ donc $\|MY\| \leqslant \|M\|_{\text{op}}$.
Mais $MY = \frac{MX}{\|X\|}$ donc $\|MY\| = \frac{\|MX\|}{\|X\|}$, on a donc $\frac{\|MX\|}{\|X\|} \leqslant \|M\|_{\text{op}}$.

Ainsi, $\|M\|_{\text{op}}$ est un majorant de l'ensemble $\left\{\frac{\|MX\|}{\|X\|} \ ; \ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}\right\}$.

D'autre part, par définition de $\|M\|_{\text{op}}$, il existe $X_0 \in \Sigma_n$ tel que $\|MX_0\| = \|M\|_{\text{op}}$. On a alors $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ et $\frac{\|MX_0\|}{\|X_0\|} = \|M\|_{\text{op}}$. Ce majorant est donc atteint, donc

$$\|M\|_{\text{op}} = \max\left\{\frac{\|MX\|}{\|X\|} \ ; \ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}\right\} .$$

• On a donc $\|MX\| \leqslant \|M\|_{\text{op}} \|X\|$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Donc

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \qquad \|M'MX\| \leqslant \|M'\|_{\text{op}} \|MX\| \leqslant \|M'\|_{\text{op}} \|M\|_{\text{op}} \|X\| \ .$$

Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$, on a donc $\frac{\|M'MX\|}{\|X\|} \leqslant \|M'\|_{\text{op}} \|M\|_{\text{op}}$. De la définition d'un maximum, on déduit que $\|M'M\|_{\text{op}} \leqslant \|M'\|_{\text{op}} \|M\|_{\text{op}}$.

2. • On connaît les produits scalaires et l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cadre des espaces préhilbertiens **réels**, on s'y ramène facilement en écrivant que, avec $U = \begin{pmatrix}u_1 & \cdots & u_n\end{pmatrix}^T$ et $V = \begin{pmatrix}v_1 & \cdots & v_n\end{pmatrix}^T$ appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, alors

$$\left|V^TU\right| = \left|\sum_{k=1}^n u_kv_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^n |u_k|\,|v_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^n |u_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n |v_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|U\|\,\|V\| \ .$$

Donc, si $V \in \Sigma_n$, on a $\left|V^TU\right| \leqslant \|U\|$. Puis,
- si $U = 0$, alors clairement $\max\left\{\left|V^TU\right| \ ; \ V \in \Sigma_n\right\} = 0 = \|U\|$;
- sinon, en choisissant $V_0 = \frac{\overline{U}}{\|U\|} \in \Sigma_n$, on a

$$\left|V_0^TU\right| = \frac{\left|\overline{U}^TU\right|}{\|U\|} = \frac{\|U\|^2}{\|U\|} = \|U\| \ ,$$

le majorant obtenu est donc atteint, donc $\max\left\{\left|V^TU\right| \,;\, V\in\Sigma_n\right\} = \|U\|$.

• D'abord, si $(X,Y)\in\Sigma_n^2$, on a $\left|X^TMY\right| \leqslant \|MY\| \leqslant \|M\|_{\rm op}\,\|Y\| = \|M\|_{\rm op}$. Puis,
- si $M=0$, l'inégalité demandée est triviale ;
- sinon, soit $Y_0\in\Sigma_n$ tel que $\|MY_0\| = \|M\|_{\rm op} > 0$, choisissons $X_0 = \frac{\overline{MY_0}}{\|MY_0\|}$, alors $X_0\in\Sigma_n$ et

$$\left|X_0^TMY_0\right| = \left|\frac{(\overline{MY_0})^T\,MY_0}{\|MY_0\|}\right| = \frac{\|MY_0\|^2}{\|MY_0\|} = \|MY_0\| = \|M\|_{\rm op}\ ,$$

on conclut donc que $\max\left\{\left|X^TMY\right| \,;\, (X,Y)\in\Sigma_n\times\Sigma_n\right\} = \|M\|_{\rm op}$.

Remarque. Si $(X,Y)\in\left(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})\right)^2$, on a $|X^TMY| \leqslant \|M\|_{\rm op}\,\|X\|\,\|Y\|$.

PARTIE II - L'ensemble $\mathcal{B}_n$

3. • Si $M\in\mathcal{B}_n$ et $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, alors

$$\forall k\in\mathbb{N}\qquad \|M^kX\| \leqslant \|M^k\|_{\rm op}\,\|X\| \leqslant b(M)\,\|X\|\ ,$$

la suite $\left(\|M^kX\|\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est donc bornée.

• Si $X\neq 0$ et $MX=\lambda X$, classiquement $M^kX=\lambda^kX$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.

• Soit $M\in\mathcal{B}_n$, soit $\lambda\in\sigma(M)$, soit X un vecteur propre associé. Alors la suite de terme général $\|M^kX\| = \|\lambda^kX\| = |\lambda|^k\,\|X\|$ doit être bornée, ce qui implique $|\lambda|\leqslant 1$. On a donc l'inclusion $\sigma(M)\subset\mathbb{D}$.

4. Considérons la matrice $M = I_n + E_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ & 1 & 0 & & \vdots\\ & & \ddots & \ddots & \vdots\\ & (0) & & \ddots & 0\\ & & & & 1\end{pmatrix} \in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Cette matrice est triangulaire supérieure avec $\sigma(M)=\{1\}\subset\mathbb{D}$. Mais on calcule facilement $M^k = I_n + kE_{1,2}$, et en prenant $X=E_2$ (deuxième vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$), on a $M^kX = kE_1+E_2$, donc $\|M^kX\| = \sqrt{k^2+1} \longrightarrow k{+}\infty+\infty$. La suite $\left(\|M^kE_2\|\right)_{k\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, on déduit alors de la question **3.** que $M\notin\mathcal{B}_n$.

PARTIE III - Résolvante d'un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

5. • Soit $D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonale, alors $\sigma(M)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$ (*non nécessairement distincts*), et $\chi_D = \prod_{k=1}^n(X-\lambda_k)$. Si $z\in\mathbb{C}\setminus\sigma(D)$, alors zI_n-D est inversible et v

$$R_z(D) = (zI_n-D)^{-1} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{z-\lambda_1},\cdots,\frac{1}{z-\lambda_n}\right)\ .$$

On a donc $\left(R_z(D)\right)_{i,j}=0$ si $i\neq j$, et $\left(R_z(D)\right)_{i,i} = \frac{1}{z-\lambda_i} = \dfrac{\displaystyle\prod_{k\neq i}(z-\lambda_k)}{\chi_D(z)}$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$. La propriété $\mathcal{P}$ est alors vérifiée avec les polynômes (de degré au plus $n-1$) :

$$\begin{cases} P_{D,i,j} = 0 \quad \text{si } i\neq j\\ P_{D,i,i} = \displaystyle\prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k\neq i}}(X-\lambda_k) \quad \text{pour } i\in[\![1,n]\!]\end{cases}\ .$$

• Si $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable, posons $M=QDQ^{-1}$ avec $Q\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, et $D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$. Alors $\chi_M=\chi_D$ et $\sigma(M)=\sigma(D)$.
Si $z\in\mathbb{C}\setminus\sigma(M)$, alors $zI_n-M = Q(zI_n-D)Q^{-1}$, puis

$$R_z(M) = (zI_n-M)^{-1} = Q\cdot R_z(D)\cdot Q^{-1}\ ,$$

donc, en utilisant l'étude faite pour une matrice diagonale, pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$\begin{aligned}\big(R_z(M)\big)_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(Q)_{i,k}\,\big(R_z(D)\big)_{k,l}\,(Q^{-1})_{l,i}\\ &= \sum_{k,l}(Q)_{i,k}\,\frac{P_{D,k,l}(z)}{\chi_D(z)}\,(Q^{-1})_{l,i} \;=\; \frac{P_{M,i,j}(z)}{\chi_M(z)}\end{aligned}$$

avec $P_{M,i,j} = \sum_{k,l}(Q)_{i,k}\,(Q^{-1})_{l,i}\,P_{D,k,l} \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ puisque c'est une combinaison linéaire de polynômes appartenant à $\mathbb{C}_{n-1}[X]$. Donc M vérifie $\mathcal{P}$.

6. Si $z \in \mathbb{C}\setminus\sigma(M)$, avec $X = \begin{pmatrix}x_1 & \cdots & x_n\end{pmatrix}^T$ et $Y = \begin{pmatrix}y_1 & \cdots & y_n\end{pmatrix}^T$, on a

$$X^T\cdot R_z(M)\cdot Y = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_j\,\big(R_z(M)\big)_{i,j} = \sum_{i,j}x_iy_j\,\frac{P_{M,i,j}(z)}{\chi_M(z)} = \frac{P_{M,X,Y}(z)}{\chi_M(z)}$$

en posant $P_{M,X,Y} = \sum_{i,j}x_iy_j\,P_{M,i,j}$, polynôme de degré $n-1$ au plus.

7. • Si $M \in \mathcal{B}_n$, alors $\forall j\in\mathbb{N}\quad \|M^j\|_{\rm op} \leqslant b(M)$. On a alors, si $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}$, i.e. si $|z|>1$,

$$\forall j\in\mathbb{N}\qquad \left\|\frac{M^j}{z^{j+1}}\right\|_{\rm op} = \frac{\|M^j\|_{\rm op}}{|z|^{j+1}} \leqslant \frac{b(M)}{|z|^{j+1}}\;,$$

terme général d'une série géométrique de raison $\frac{1}{|z|}<1$, donc convergente. Comme $\|\cdot\|_{\rm op}$ est une norme sur l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, le résultat admis donne la convergence de la série $\sum_{j\geqslant 0}\frac{M^j}{z^{j+1}}$ dans cet espace normé. • Pour $m\in\mathbb{N}$, par télescopage, on obtient

$$\textbf{(*)}\qquad (zI_n-M)\sum_{j=0}^{m}\frac{M^j}{z^{j+1}} = \sum_{j=0}^{m}\frac{M^j}{z^j} - \sum_{j=1}^{m+1}\frac{M^j}{z^j} = I_n - \frac{M^{m+1}}{z^{m+1}}\;.$$

• Posons $S = \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{M^j}{z^{j+1}} = \lim_{m\to+\infty}\left(\sum_{j=0}^{m}\frac{M^j}{z^{j+1}}\right)$.

On a $\lim_{m\to+\infty}\frac{M^{m+1}}{z^{m+1}} = 0$ puisque $\left\|\frac{M^{m+1}}{z^{m+1}}\right\|_{\rm op} \leqslant \frac{b(M)}{|z|^{m+1}} \longrightarrow m{+}\infty 0$.

En passant à la limite $(m\longrightarrow+\infty)$ dans **(*)**, en utilisant la continuité du produit matriciel, on obtient la relation $(zI_n-M)\,S = I_n$, soit

$$S = \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{M^j}{z^{j+1}} = (zI_n-M)^{-1} = R_z(M)\;.$$

8. Soit $M\in\mathcal{B}_n$, soit $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}$. Pour tout $m\in\mathbb{N}$, par l'inégalité triangulaire, on a

$$\left\|\sum_{j=0}^{m}\frac{M^j}{z^{j+1}}\right\|_{\rm op} \leqslant \sum_{j=0}^{m}\frac{\|M^j\|_{\rm op}}{|z|^{j+1}} \leqslant b(M)\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{|z|^{j+1}}\;.$$

En faisant tendre m vers l'infini, on déduit

$$\big\|R_z(M)\big\|_{\rm op} \leqslant b(M)\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{|z|^{j+1}} = \frac{b(M)}{|z|-1}\;,$$

donc $\varphi_M(z) = \big(|z|-1\big)\,\big\|R_z(M)\big\|_{\rm op} \leqslant b(M)$.

9. • Posons $u_j(t) = c_j\,\mathrm{e}^{-i(j+1)t}$ pour tout j entier naturel. Chaque fonction u_j est continue sur $\mathbb{R}$ et $\|u_j\|_\infty = |c_j|$, donc la série $\sum \|u_j\|_\infty$ converge, il y a donc convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum u_j$, ce qui entraîne la continuité de la somme u.

• On a alors

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\,\mathrm{e}^{i(k+1)t}\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=0}^{+\infty} c_j\,\mathrm{e}^{i(k-j)t}\,\mathrm{d}t = \sum_{j=0}^{+\infty} c_j \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{i(k-j)t}\,\mathrm{d}t$$

puisque, $k \in \mathbb{N}$ étant fixé, la série de fonctions $\sum v_j$ avec $v_j(t) = c_j\,\mathrm{e}^{i(k-j)t}$ converge normalement sur le segment $[-\pi,\pi]$, ce qui autorise l'intégration terme à terme.
Comme $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{i(k-j)t}\,\mathrm{d}t = 2\pi\,\delta_{j,k}$ (symbole de Kronecker), on déduit que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\,\mathrm{e}^{i(k+1)t}\,\mathrm{d}t = c_k\ .$$

10. • Comme $re^{it} \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{D}$, on a $\displaystyle R_{re^{it}}(M) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-i(j+1)t}}{r^{j+1}}\,M^j$ d'après la question **7.**
Donc (*en travaillant sur une somme partielle, puis en passant à la limite en utilisant la continuité du produit matriciel*),

$$X^T\cdot R_{re^{it}}(M)\cdot Y = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-i(j+1)t}}{r^{j+1}}\,X^TM^jY = \sum_{j=0}^{+\infty} c_j\,\mathrm{e}^{-i(j+1)t}\ ,$$

en posant $c_j = \frac{X^TM^jY}{r^{j+1}}$ pour tout $j\in\mathbb{N}$. La majoration $|c_j| \leqslant b(M)\,\frac{\|X\|\,\|Y\|}{r^{j+1}}$ montre que la série $\sum c_j$ est absolument convergente.

• De **Q9.**, on déduit que

$$X^TM^kY = r^{k+1}\,c_k = \frac{r^{k+1}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{i(k+1)t}\,X^T\cdot R_{re^{it}}(M)\cdot Y\,\mathrm{d}t\ .$$

PARTIE IV - Variation totale et norme uniforme

11. Posons $f_n(x) = \mathrm{e}^{inx}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in[-\pi,\pi]$. Alors $f_n\in\mathcal{C}^1$, $\|f_n\|_\infty = 1$ et

$$\frac{V(f_n)}{\|f_n\|_\infty} = V(f_n) = \int_{-\pi}^{\pi} n\,\mathrm{d}x = 2\pi n \longrightarrow n{+}\infty + \infty\ ,$$

donc le rapport $\frac{V(f)}{\|f\|_\infty}$, pour $f\in\mathcal{C}^1\setminus\{0\}$, n'est pas majoré. Une telle constante $C\in\mathbb{R}_+^*$ n'existe donc pas.

12. • Par la relation de Chasles, $\displaystyle V(f) = \sum_{j=0}^{l}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \big|f'(t)\big|\,\mathrm{d}t$.
Or, f' étant continue, elle garde un signe constant (au sens large) sur chaque segment $[t_j,t_{j+1}]$.Donc

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \big|f'(t)\big|\,\mathrm{d}t = \left|\int_{t_j}^{t_{j+1}} f'(t)\,\mathrm{d}t\right| = \big|f(t_{j+1})-f(t_j)\big|\ .$$

On en déduit que $\displaystyle V(f) = \sum_{j=0}^{l}\big|f(t_{j+1})-f(t_j)\big|$. • Soit $j\in[\![0,l]\!]$.
- Si $f'>0$ sur $]t_j,t_{j+1}[$, alors f est strictement croissante sur $[t_j,t_{j+1}]$, ce qui entraîne que $-\|f\|_\infty \leqslant f(t_j) < f(t_{j+1}) \leqslant \|f\|_\infty$. Par la relation de Chasles, vv

$$\int_{-\|f\|_\infty}^{\|f\|_\infty}\psi_j = \int_{-\|f\|_\infty}^{f(t_j)}\psi_j + \int_{f(t_j)}^{f(t_{j+1})}\psi_j + \int_{f(t_{j+1})}^{\|f\|_\infty}\psi_j = 0 + \big(f(t_{j+1})-f(t_j)\big) + 0 = \big|f(t_{j+1})-f(t_j)\big|\ .$$

- Si $f' < 0$ sur $]t_j, t_{j+1}[$, alors f est strictement décroissante sur $[t_j, t_{j+1}]$, ce qui entraîne que $-\|f\|_\infty \leqslant f(t_{j+1}) < f(t_j) \leqslant \|f\|_\infty$. Par la relation de Chasles, vv

$$\int_{-\|f\|_\infty}^{\|f\|_\infty} \psi_j = \int_{-\|f\|_\infty}^{f(t_{j+1})} \psi_j + \int_{f(t_{j+1})}^{f(t_j)} \psi_j + \int_{f(t_j)}^{\|f\|_\infty} \psi_j = 0 + \big(f(t_j) - f(t_{j+1})\big) + 0 = \big|f(t_{j+1}) - f(t_j)\big| \ .$$

On en déduit que $V(f) = \displaystyle\sum_{j=0}^{l} \int_{-\|f\|_\infty}^{\|f\|_\infty} \psi_j$.

13. • La fonction f est strictement monotone sur chaque intervalle $[t_j, t_{j+1}[$ avec $0 \leqslant j \leqslant l$ (*cela a déjà été mentionné à la question précédente*), donc f est injective sur chacun de ces intervalles, et le réel y a donc au plus un antécédent par f dans chacun de ces intervalles. Comme $\bigsqcup_{j=0}^{l} [t_j, t_{j+1}[= [-\pi, \pi[$ et qu'il y a $l+1$ intervalles, on déduit que

$$N(y) = \mathrm{Card}\Big(f^{-1}\big(\{y\}\big) \cap [-\pi, \pi[\Big) \leqslant l + 1 \ .$$

• Comme f est continue et strictement monotone sur $[t_j, t_{j+1}[$, on a

$$f\big([t_j, t_{j+1}[\big) = \big[f(t_j), f(t_{j+1})\big[\quad \text{ou} \quad \big]f(t_{j+1}), f(t_j)\big] \ ,$$

et le réel y admet un antécédent par f dans cet intervalle si et seulement si $\psi_j(y) = 1$. Donc

$$N(y) = \sum_{j=0}^{l} \psi_j(y) \ .$$

• La fonction N est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ (comme somme des fonctions ψ_j qui sont des fonctions indicatrices d'intervalles) et, par linéarité de l'intégrale,

$$V(f) = \sum_{j=0}^{l} \int_{-\|f\|_\infty}^{\|f\|_\infty} \psi_j(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\|f\|_\infty}^{\|f\|_\infty} \Big(\sum_{j=0}^{l} \psi_j(y)\Big)\,\mathrm{d}y = \int_{-\|f\|_\infty}^{\|f\|_\infty} N(y)\,\mathrm{d}y \ .$$

On en déduit que $V(f) \leqslant 2\,\|f\|_\infty \cdot \max\big\{N(y)\ ;\ y \in \mathbb{R}\big\}$.

PARTIE V - L'inégalité de Spijker

14. • On a les équivalences vv

$$\begin{aligned} f_u(t) = y \quad &\Longleftrightarrow \quad \Re\Big(\mathrm{e}^{-iu}\,\frac{P(\mathrm{e}^{it})}{Q(\mathrm{e}^{it})}\Big) = y \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{e}^{-iu}\,\frac{P(\mathrm{e}^{it})}{Q(\mathrm{e}^{it})} + \mathrm{e}^{iu}\,\frac{\overline{P(\mathrm{e}^{it})}}{\overline{Q(\mathrm{e}^{it})}} = 2y \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{e}^{-iu}\,P(\mathrm{e}^{it})\,\overline{Q(\mathrm{e}^{it})} + \mathrm{e}^{iu}\,\overline{P(\mathrm{e}^{it})}\,Q(\mathrm{e}^{it}) - 2y\,Q(\mathrm{e}^{it})\,\overline{Q(\mathrm{e}^{it})} = 0 \quad \textbf{(**)} \ . \end{aligned}$$

Pour tout polynôme $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}_n[X]$, on a, pour t réel,

$$\overline{A(\mathrm{e}^{it})} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k}\,\mathrm{e}^{-ikt} = \mathrm{e}^{-int} \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k}\,\mathrm{e}^{i(n-k)t} = \mathrm{e}^{-int}\,\widetilde{A}(\mathrm{e}^{it})$$

en posant $\widetilde{A} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \overline{a_k}\,X^{n-k} \in \mathbb{C}_n[X]$. En multipliant **(**)** par e^{int}, on obtient

$$\begin{aligned} f_u(t) = y \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{e}^{-iu}\,P(\mathrm{e}^{it})\,\widetilde{Q}(\mathrm{e}^{it}) + \mathrm{e}^{iu}\,\widetilde{P}(\mathrm{e}^{it})\,Q(\mathrm{e}^{it}) - 2y\,Q(\mathrm{e}^{it})\,\widetilde{Q}(\mathrm{e}^{it}) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad S(\mathrm{e}^{it}) = 0 \end{aligned}$$

avec $S = \mathrm{e}^{-iu}\,P\,\widetilde{Q} + \mathrm{e}^{iu}\,\widetilde{P}\,Q - 2y\,Q\,\widetilde{Q} \in \mathbb{C}_{2n}[X]$. • Si f_u n'est pas constante, alors S n'est pas le polynôme nul, il admet alors au plus $2n$ racines complexes. L'application $t \mapsto \mathrm{e}^{it}$ étant injective sur $[-\pi, \pi[$, il y a alors au plus $2n$ réels t dans cet intervalle vérifiant $S(\mathrm{e}^{it}) = 0$. Donc

$$\mathrm{Card}\Big(f_u^{-1}\big(\{y\}\big) \cap [-\pi, \pi[\Big) \leqslant 2n\ .$$

15. • Comme la fonction $|\cos|$ est 2π-périodique, son intégrale est la même sur tout segment de longueur 2π donc, en terminant par de faciles considérations de signe et de symétrie,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \big|\cos(u-\omega)\big|\,\mathrm{d}u = \int_{-\pi-\omega}^{\pi-\omega} \big|\cos(t)\big|\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \big|\cos(t)\big|\,\mathrm{d}t = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{d}t = 4\ .$$

• Si $(a,b) = (0,0)$, la relation demandée est triviale. Sinon, $\Big(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\Big)^2 + \Big(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\Big)^2 = 1$, donc il existe un réel ω tel que $\cos(\omega) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin(\omega) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, on a alors

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \big|a\,\cos(u) + b\,\sin(u)\big|\,\mathrm{d}u &= \sqrt{a^2+b^2}\int_{-\pi}^{\pi} \big|\cos(u)\,\cos(\omega) + \sin(u)\,\sin(\omega)\big|\,\mathrm{d}u \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\int_{-\pi}^{\pi} \big|\cos(u-\omega)\big|\,\mathrm{d}u \;=\; 4\,\sqrt{a^2+b^2}\ .\end{aligned}$$

16. On a $f_u'(t) = g'(t)\,\cos(u) + h'(t)\,\sin(u)$. De la question précédente, on déduit que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \big|f_u'(t)\big|\,\mathrm{d}u = 4\,\sqrt{g'(t)^2 + h'(t)^2} = 4\,\big|f'(t)\big|\ .$$

Donc $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\int_{-\pi}^{\pi} \big|f_u'(t)\big|\,\mathrm{d}u\Big)\,\mathrm{d}t = 4\int_{-\pi}^{\pi} \big|f'(t)\big|\,\mathrm{d}t = 4\,V(f)$.

17. Donc, en utilisant le théorème de Fubini admis (interversion d'intégrales) :

$$V(f) = \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\int_{-\pi}^{\pi} \big|f_u'(t)\big|\,\mathrm{d}t\Big)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} V(f_u)\,\mathrm{d}u\ .$$

Or pour tout $u \in [-\pi, \pi]$, $f_u \in \mathcal{C}^1$ et est à valeurs réelles. Si f_u n'est pas constante, alors on admet que l'ensemble des zéros de f_u' dans $]-\pi, \pi[$ est fini, et il résulte alors de la question **13.** que

$$V(f_u) \leqslant 2\,\|f_u\|_\infty \cdot \max_{y\in\mathbb{R}} N_u(y)$$

en posant $N_u(y) = \mathrm{Card}\Big(f_u^{-1}\big(\{y\}\big) \cap [-\pi, \pi[\Big)$. Donc, par la question **14.**, on déduit

$$\textbf{(***)} \qquad V(f_u) \leqslant 4n\,\|f_u\|_\infty\ .$$

L'inégalité **(***)** est par ailleurs immédiate si f_u est constante puisqu'alors $V(f_u) = 0$.
D'autre part, $\big|f_u(t)\big| = \Big|\Re\big(\mathrm{e}^{-iu}f(t)\big)\Big| \leqslant \big|\mathrm{e}^{-iu}f(t)\big| = \big|f(t)\big|$, donc $\|f_u\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$.
Finalement, $V(f) = \frac{1}{4}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} V(f_u)\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{4} \times 2\pi \times 4n\,\|f\|_\infty = 2\pi\,n\,\|f\|_\infty$.

PARTIE V - La version de Spijker du théorème matriciel de Kreiss

18. Posons $F_r(z) = X^T \cdot R_{rz}(M) \cdot Y$ pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_{\frac{1}{r}}$, i.e. lorsque $|rz| > 1$. La question **6.** montre que $F_r(z) = \frac{P_{M,X,Y}(rz)}{\chi_M(rz)}$. Les polynômes $P_{M,X,Y}(rZ)$ et $\chi_M(rZ)$, *en appelant ici Z l'indéterminée pour éviter un conflit de notations*, sont de degré au plus n et, si $|z| = 1$, alors $|rz| = r > 1$ donc $rz \notin \sigma(M)$ d'après **Q3.** donc $\chi_M(rz) \neq 0$. La fraction rationnelleF_r n'a donc pas de pôle de module 1, donc $F_r \in \mathcal{R}_n$.
En fait, si $\chi_M(rz) = 0$ alors $|rz| \leqslant 1$ d'après **Q3.** donc $z \in \mathbb{D}_{\frac{1}{r}}$. Les pôles de la fraction rationnelle F_r sont donc dans le disque fermé $\mathbb{D}_{\frac{1}{r}}$.
D'après **Q10.**, on a vv

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad X^T M^k Y = \frac{r^{k+1}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_r(\mathrm{e}^{it})\, \mathrm{e}^{i(k+1)t}\, \mathrm{d}t \ .$$

Enfin, si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_{\frac{1}{r}}$, alors $rz \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ et

$$\big|F_r(z)\big| = \big|X^T \cdot R_{rz}(M) \cdot Y\big| \leqslant \big\|R_{rz}(M)\big\|_{\mathrm{op}} = \frac{\varphi_M(rz)}{|rz|-1} \leqslant \frac{b'(M)}{r|z|-1} \ .$$

19. Comme dans la **PARTIE 5**, posons $f(t) = F_r(\mathrm{e}^{it})$, alors $f \in \mathcal{C}^1$ et, par une intégration par parties, vv

$$X^T M^k Y = \frac{r^{k+1}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \mathrm{e}^{i(k+1)t}\, \mathrm{d}t = \frac{i\, r^{k+1}}{2\pi(k+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\, \mathrm{e}^{i(k+1)t}\, \mathrm{d}t$$

(*je n'ai pas explicité le "terme entre crochets", mais il est nul*). Donc

$$|X^T M^k Y| \leqslant \frac{r^{k+1}}{2\pi(k+1)} \int_{-\pi}^{\pi} \big|f'(t)\big|\, \mathrm{d}t = \frac{r^{k+1}\, V(f)}{2\pi(k+1)} \ .$$

L'inégalité **(3)** de la question **17.** donne alors $|X^T M^k Y| \leqslant \frac{r^{k+1}}{k+1}\, n\, \|f\|_\infty$.
Enfin, de la majoration de **Q18.** avec $z = \mathrm{e}^{it}$, on déduit $\|f\|_\infty \leqslant \frac{b'(M)}{r-1}$. Finalement,

$$|X^T M^k Y| \leqslant \frac{r^{k+1}}{(k+1)(r-1)}\, n\, b'(M) \ .$$

20. Si $M \in \mathcal{B}_n$ et $k \in \mathbb{N}$, il résulte de **Q19.** que

$$|X^T M^k Y| \leqslant n \cdot b'(M) \cdot \inf_{r>1} \left(\frac{r^{k+1}}{(k+1)(r-1)} \right) .$$

Posons $h_k(r) = \frac{r^{k+1}}{(k+1)(r-1)}$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $r \in]1, +\infty[$.
• pour $k = 0$, $h_0(r) = \frac{r}{r-1}$, et on a clairement $\inf_{r>1} h_0(r) = 1 \leqslant e$; • si $k \in \mathbb{N}^*$, une étude de variations montre que $\min_{r>1} h_k(r) = h_k\Big(1 + \frac{1}{k}\Big) = \Big(1 + \frac{1}{k}\Big)^k \leqslant e$.
Donc $|X^T M^k Y| \leqslant e\, n\, b'(M)$ pour tout k entier naturel. De **Q2.**, on déduit alors que

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \|M^k\|_{\mathrm{op}} \leqslant e\, n\, b'(M) \ .$$

De la définition de $b(M)$, on déduit enfin que $b(M) \leqslant e\, n\, b'(M)$.

FIN DE LA CORRECTION