# Composition n° 2, bis

Le vendredi 16 octobre 2026

**L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.**

*La **présentation** de la copie doit être correcte, les résultats mis en valeur et les feuilles numérotées.*
*Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. La clarté, la précision et la concision de la rédaction entrent dans une part importante de l'évaluation.*
**Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, le vecteur colonne $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ appartient à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ ; on pose

$$\|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}.$$

On admet que l'application $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \longmapsto \|X\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On note

$$\Sigma_n = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}); \|X\| = 1\}.$$

On identifie $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{C})$ à $\mathbb{C}$. Ainsi, si $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})^2$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $X^T M Y$ est un nombre complexe.

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\chi_M$ le polynôme caractéristique de $M$, $\sigma(M)$ l'ensemble des valeurs propres de $M$. Si $1 \leqslant i, j \leqslant n$, on note $(M)_{i,j}$ le coefficient de $M$ situé à la $i$-ième ligne et à la $j$-ième colonne. Pour $z \in \mathbb{C}\backslash\sigma(M)$, on note

$$R_z(M) = (zI_n - M)^{-1}.$$

Soient

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\} \quad \text{et} \quad \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leqslant 1\}$$

Les parties 4 et 5 sont indépendantes des parties 1, 2 et 3 . Dans la partie 3 , les questions 7 à 10 sont indépendantes des questions 5 et 6 .

## Partie I - Norme d'opérateur sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

1. Justifier que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, l'application

$$X \in \Sigma_n \longmapsto \|MX\|$$

atteint son maximum, que l'on notera $\|M\|_{\text{op}}$. Établir les deux propriétés

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \|M\|_{\text{op}} = \max\left\{\frac{\|MX\|}{\|X\|}; X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})\backslash\{0\}\right\}$$
$$\forall (M, M') \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2, \quad \|M'M\|_{\text{op}} \leqslant \|M'\|_{\text{op}} \|M\|_{\text{op}}.$$

On admettra dans la suite que l'application $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longmapsto \|M\|_{\text{op}}$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Si $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, montrer que

$$\max\left\{\left|V^T U\right|; V \in \Sigma_n\right\} = \|U\|.$$

En déduire que, si $M$ est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors

$$\max\left\{\left|X^T M Y\right|; (X, Y) \in \Sigma_n \times \Sigma_n\right\} = \|M\|_{\text{op}}$$

## Partie II - L'ensemble $\mathcal{B}_n$

Soit $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des matrices $M$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que la suite $\left(\left\|M^k\right\|_{op}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ soit bornée.
Pour $M \in \mathcal{B}_n$, on pose

$$b(M) = \sup\left\{\left\|M^k\right\|_{\text{op}}; k \in \mathbb{N}\right\}.$$

3. Soient $M \in \mathcal{B}_n, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Montrer que la suite $\left(\left\|M^k X\right\|\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée.
   Si $\lambda \in \sigma(M)$, si $X$ est un vecteur propre de $M$ associé à $\lambda$, exprimer pour $k \in \mathbf{N}$, le vecteur $M^k X$ en fonction de $\lambda, k$ et $X$. En déduire que $\sigma(M) \subset \mathbb{D}$.
4. On suppose que $n \geqslant 2$. Indiquer, avec justification, une matrice $M$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, triangulaire supérieure, telle que $\sigma(M) \subset \mathbb{D}$, mais n'appartenant pas à $\mathcal{B}_n$.

## Partie III - Résolvante d'un élément de $\mathcal{M}_n(\mathrm{C})$

On dit que l'élément $M$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ vérifie $\mathcal{P}$ si, pour tout $(i,j)$ de $\{1,\ldots,n\}^2$, il existe un élément $P_{M,i,j}$ de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}\backslash\sigma(M), \quad (R_z(M))_{i,j} = \frac{P_{M,i,j}(z)}{\chi_M(z)}. \tag{$\mathcal{P}$}$$

6. Montrer que les matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifient $\mathcal{P}$.
   *On commencera par le cas des matrices diagonales.*
7. On admet que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $\mathcal{P}$. En déduire que, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $(X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})^2$, il existe un élément $P_{M,X,Y}$ de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}\backslash\sigma(M), \quad X^T R_z(M) Y = \frac{P_{M,X,Y}(z)}{\chi_M(z)}$$

8. Soient $M \in \mathcal{B}_n$ et $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{D}$. Montrer que la série de matrices $\sum \frac{M^j}{z^{j+1}}$ converge.
   *On admettra le fait suivant : soit $(E,N)$ un espace vectoriel normé de dimension finie ; si $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $E$ telle que la série $\sum N(v_j)$ converge, alors la série $\sum v_j$ converge dans $E$.*
   Si $m \in \mathbb{N}$, donner une expression simplifiée de $(zI_n - M)\sum_{j=0}^{m} \frac{M^j}{z^{j+1}}$.
   En déduire que

$$R_z(M) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{M^j}{z^{j+1}}$$

Pour $M \in \mathcal{B}_n$, on définit la fonction

$$\varphi_M : z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{D} \longmapsto (|z|-1)\left\|R_z(M)\right\|_{\text{op.}}.$$

9. Déduire de la question précédente l'inégalité

$$(1) \quad \forall M \in \mathcal{B}_n, \quad \forall z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{D}, \quad \varphi_M(z) \leqslant b(M).$$

   Soit $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum c_j$ converge absolument. On pose

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} c_j e^{-i(j+1)t}.$$

10. Justifier l'existence et la continuité de la fonction $u$.
    Pour $k \in \mathbb{N}$, montrer que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t) e^{i(k+1)t}\mathrm{dt} = c_k$$

11. Soient $M \in \mathcal{B}_n$, $r \in ]1,+\infty[$. et $(X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})^2$. Déterminer une suite de nombres complexes $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum c_j$ converge absolument et que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad X^T R_{re^{it}}(M) Y = \sum_{j=0}^{+\infty} c_j e^{-i(j+1)t}$$

    Si $k \in \mathbb{N}$, en déduire, en utilisant la question 9 , une expression intégrale de $X^T M^k Y$.

## Partie IV - Variation totale et norme uniforme

Soit $\mathcal{C}^1$ l'espace des fonctions de classe $C^1$ de $[-\pi,\pi]$ dans $\mathbb{C}$. Pour $f\in\mathcal{C}^1$, on pose

$$\|f\|_\infty=\max\{|f(t)|;t\in[-\pi,\pi]\}\quad\text{et}\quad V(f)=\int_{-\pi}^{\pi}|f'|\,.$$

11. En considérant une suite de fonctions bien choisie, montrer qu'il n'existe pas d'élément $C$ de $\mathbb{R}^{+*}$ tel que

$$\forall f\in\mathcal{C}^1,\quad V(f)\leqslant C\|f\|_\infty$$

Soit $f\in\mathcal{C}^1$ à valeurs réelles. On suppose que l'ensemble $C(f)$ des points de $]-\pi,\pi[$ en lesquels la fonction $f$ s'annule est fini. On note $\ell$ le cardinal de $C(f)$ et, si $\ell\geqslant 1$, on désigne par $t_1<\cdots<t_\ell$ les éléments de $C(f)$. On pose $t_0=-\pi$ et $t_{\ell+1}=\pi$.

12. Montrer que

$$V(f)=\sum_{j=0}^{\ell}|f(t_{j+1})-f(t_j)|\,.$$

Pour $0\leqslant j\leqslant\ell$, soit $\psi_j$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\{0,1\}$ égale à 1 sur $[f(t_j),f(t_{j+1})[$ et à 0 sur $\mathbb{R}\setminus[f(t_j),f(t_{j+1})[$. Montrer que

$$V(f)=\sum_{j=0}^{\ell}\int_{-\|f\|_\infty}^{\|f\|_\infty}\psi_j.$$

13. Si $y\in\mathbb{R}$, montrer que l'ensemble $f^{-1}(\{y\})\cap[-\pi,\pi[$ est fini de cardinal majoré par $\ell+1$ ; on note $N(y)$ ce cardinal.

Si $y\in\mathbb{R}$, exprimer $N(y)$ en fonction de $\psi_0(y),\dots,\psi_\ell(y)$. En déduire l'inégalité

$$V(f)\leqslant 2\max\{N(y);y\in\mathbb{R}\}\|f\|_\infty. \qquad (2)$$

## Partie V - L'inégalité de Spijker

On appelle fraction rationnelle tout quotient $F=\frac{P}{Q}$ où $P\in\mathbb{C}[X]$ et $Q\in\mathbb{C}[X]\setminus\{0\}$. Une telle fraction peut s'écrire sous la forme précédente de façon que $P$ et $Q$ n'aient pas de racine commune dans $\mathbb{C}$ ; si tel est le cas, les racines de $Q$ dans $\mathbb{C}$ sont, par définition, les pôles de $F$. On note $\mathcal{R}_n$ l'ensemble des fractions rationnelles sans pôle dans $\mathbb{U}$ de la forme $\frac{P}{Q}$ où $P$ et $Q$ sont deux éléments de $\mathbb{C}_n[X]$.

Soient, dans la suite de cette partie, $F\in\mathcal{R}_n$, $P$ et $Q$ deux éléments de $\mathbb{C}_n[X]$ vérifiant $F=\frac{P}{Q}$ et

$$\forall z\in\mathbb{U},\quad Q(z)\neq 0.$$

Pour $t\in[-\pi,\pi]$, on pose

$$f(t)=F\left(e^{it}\right)=g(t)+ih(t)\text{ où }\quad(g(t),h(t))\in\mathbb{R}^2.$$

Pour $u\in[-\pi,\pi]$, on définit une fonction $f_u$ de $[-\pi,\pi]$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall t\in[-\pi,\pi],\quad f_u(t)=g(t)\cos(u)+h(t)\sin(u)=\mathrm{Re}\left(e^{-iu}F\left(e^{it}\right)\right)=\mathrm{Re}\left(e^{-iu}f(t)\right).$$

14. Dans cette question, on fixe $u\in[-\pi,\pi]$ et on suppose que $f_u$ n'est pas constante. On fixe également $y\in\mathbb{R}$. En utilisant éventuellement l'expression de $f_u(t)$ comme partie réelle de $e^{-iu}F\left(e^{it}\right)$ et la formule d'Euler pour la partie réelle, déterminer $S\in\mathbb{C}_{2n}[X]$ tel que

$$\forall t\in[-\pi,\pi],\quad f_u(t)=y\Longleftrightarrow S\left(e^{it}\right)=0.$$

En déduire que l'ensemble $f_u^{-1}(\{y\})\cap[-\pi,\pi[$ est fini de cardinal majoré par $2n$.

15. En observant que la fonction $|\cos|$ est $2\pi$-périodique, calculer, pour $\omega\in\mathbb{R}$, l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\cos(u-\omega)|\mathrm{d}u.$$

En déduire que, si $(a,b)\in\mathbb{R}^2$,

$$\int_{-\pi}^{\pi}|a\cos(u)+b\sin(u)|\mathrm{d}u=4\sqrt{a^2+b^2}.$$

16. Exprimer l'intégrale
$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f'_u(t)|\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t$$
en fonction de $V(f)$.

17. On admet l'égalité
$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|{f_u}'(t)|\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|{f_u}'(t)|\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u.$$
On admet aussi que, pour $u\in[-\pi,\pi]$ tel que $f_u$ ne soit pas constante, l'ensemble des points de $]-\pi,\pi[$. en lesquels la fonction $f'_u$ s'annule est fini (ce que l'on pourrait établir en raisonnant comme dans la question 14 ).

En déduire l'inégalité
$$(3)\qquad V(f)\leqslant 2\pi n\|f\|_\infty.$$

## Partie VI - La version de Spijker du théorème matriciel de Kreiss

Soit $M\in\mathcal{B}_n$. L'inégalité (1) de la question 8 justifie la définition de
$$b'(M)=\sup\left\{\varphi_M(z);z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{D}\right\}.$$
et entraîne que $b'(M)\leqslant b(M)$. On se propose de majorer $b(M)$ en fonction de $b'(M)$.
Dans les questions 18 et 19, on fixe $r\in]1,+\infty[$ et $(X,Y)\in\Sigma_n^2$.
Pour $\rho\in\mathbb{R}^{+*}$, on note
$$\mathbb{D}_\rho=\{z\in\mathbf{C};|z|\leqslant\rho\}$$

18. Montrer qu'il existe un élément $F_r$ de $\mathcal{R}_n$ dont les pôles sont tous dans $\mathbb{D}_{1/r}$ et tel que les deux propriétés suivantes soient satisfaites :
$$\forall z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{D}_{1/r},\quad |F_r(z)|\leqslant\frac{b'(M)}{r|z|-1}$$
$$\forall k\in\mathbb{N},\quad X^TM^kY=\frac{r^{k+1}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_r\left(e^{it}\right)e^{i(k+1)t}\,\mathrm{d}t$$

19. En utilisant la question précédente, une intégration par parties et l'inégalité (3) de la question 17, montrer que
$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \left|X^TM^kY\right|\leqslant\frac{r^{k+1}}{(k+1)(r-1)}nb'(M)$$

20. Démontrer finalement l'inégalité
$$(4)\qquad b(M)\leqslant en\,b'(M).$$

Ce résultat de M.N. Spijker (1991) améliore un théorème de H.O. Kreiss (1962). La constante $en$ est asymptotiquement optimale.

FIN DU PROBLÈME