Composition n° 2

Le vendredi 16 octobre 2026

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*La **présentation** de la copie doit être correcte, les résultats mis en valeur et les feuilles numérotées.*
Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. La clarté, la précision et la concision de la rédaction entrent dans une part importante de l'évaluation.
Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun.

Exercice 1

Définitions et notations

- p désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
- On note $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre p à coefficients complexes, $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices-lignes à p colonnes à coefficients réels, $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre p à coefficients réels, I_p la matrice diagonale de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1.
- On considère une norme $\|\ \|$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
- On note, pour toute matrice carrée A d'ordre p et tout $(i,j) \in \{1,\dots,p\}^2$, $(A)_{i,j}$ le coefficient de A situé à la ligne i et à la colonne j.
- On note, pour tout matrice-ligne L de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ et tout $j \in \{1,\dots,p\}$, $(L)_j$ le coefficient de L situé à la colonne j.
- On appelle matrice stochastique toute matrice A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que : $\begin{cases} \forall (i,j) \in \{1,\dots,p\}^2,\ (A)_{i,j} \geqslant 0 \\ \forall i \in \{1,\dots,p\},\ \displaystyle\sum_{j=1}^{p} (A)_{i,j} = 1, \end{cases}$

  et on note $\mathcal{ST}_p$ l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Partie I - Résultats généraux sur les matrices stochastiques et illustrations

1. a) On note V la matrice-colonne à p lignes dont tous les coefficients sont égaux à 1.
   Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$: $\quad A \in \mathcal{ST}_p \iff \begin{cases} \forall (i,j) \in \{1,\dots,p\}^2,\ (A)_{i,j} \geqslant 0 \\ AV = V. \end{cases}$
   b) En déduire que toutes les matrices de $\mathcal{ST}_p$ ont une valeur propre commune.
   c) Démontrer que $\mathcal{ST}_p$ est un fermé de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.
2. Démontrer : $\quad \forall A, B \in \mathcal{ST}_p, \quad AB \in \mathcal{ST}_p$.
3. On note : $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.
   a) Déterminer les valeurs propres de A_1 et donner la dimension du sous-espace propre pour A_1 associé à la valeur propre 1.
   b) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A_2.
   c) Justifier si l'affirmation suivante est vraie ou fausse : « Pour tout élément A de $\mathcal{ST}_3$, le sous-espace propre pour A associé à la valeur propre 1 est de dimension 1 ».

4. Soit $A \in \mathcal{ST}_p$ et λ une valeur propre de A dans $\mathbb{C}$.
   On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ un vecteur propre pour A associé à la valeur propre λ.
   On note i un élément de $\{1, \ldots, p\}$ tel que : $\quad \forall k \in \{1, \ldots, p\},\ |x_k| \leqslant |x_i|$.
   a) Montrer : $\quad |\lambda x_i| \leqslant |x_i|$.
   b) En déduire : $\quad |\lambda| \leqslant 1$.

Partie II - Suites de moyennes de puissances de matrices stochastiques

Soit $A \in \mathcal{ST}_p$. On note $A^0 = I_p$.

5. a) Établir : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ A^n \in \mathcal{ST}_p$.
   b) Montrer : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} A^k \in \mathcal{ST}_p$.

Dans la suite de cette partie II, on suppose qu'il existe $r \in \{1, \ldots, p-1\}$, $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ inversible, $D \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ diagonale dont tous les coefficients diagonaux $(D)_{i,i}$ sont égaux à 1 si $i \leqslant r$ et distincts de 1 si $i \geqslant r+1$, tels que : $A = PDP^{-1}$.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $M_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} D^k$ et $B_n = PM_nP^{-1}$.

On note Δ la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ diagonale dont les coefficients diagonaux $(\Delta)_{i,i}$ sont égaux à 1 si $i \leqslant r$ et nuls sinon, et on note $B = P\Delta P^{-1}$.

6. Démontrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé tel que $|x| \leqslant 1$: $\quad \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \neq 1. \end{cases}$
7. Montrer : $\quad M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Delta$, et en déduire : $\quad B_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} B$.
8. a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad B_n \in \mathcal{ST}_p$.
   b) En déduire : $\quad B \in \mathcal{ST}_p$.

Exercice 2

Partie I - Applications linéaires

On considère l'espace vectoriel $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$. Pour f dans E on pose :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \quad \text{et} \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\ \mathrm{d}t.$$

On rappelle que $\|\ \|_1$ est une norme sur E.

1. Démontrer que $\|\ \|_\infty$ est une norme sur E.
2. Déterminer une constante $M > 0$ telle que $\|\ \|_1 \leqslant M \|\ \|_\infty$.
3. Les normes $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_\infty$ sont-elles équivalentes ?
4. On considère l'application linéaire $\Phi : E \to \mathbb{R}$ définie par : $\Phi(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. L'application Φ est-elle continue de $(E, \|\ \|_\infty)$ dans $(\mathbb{R}, |\ |)$?
5. On considère l'application linéaire $\Psi : E \to \mathbb{R}$ définie par : $\psi(f) = f(1)$.
   (a) En considérant la suite de fonctions (f_n) de E où, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \mapsto \sqrt{n}t^n$, démontrer que Ψ n'est pas continue de $(E, \|\ \|_1)$ dans $(\mathbb{R}, |\ |)$.
   (b) L'application Ψ est-elle continue de $(E, \|\ \|_\infty)$ dans $(\mathbb{R}, |\ |)$?

Partie II - Densité de $GL_n(\mathbb{R})$

On considère l'espace vectoriel normé $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On pourra utiliser librement dans cet exercice que l'application déterminant est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

6. L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est-il fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
7. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pourquoi la suite $\left(M - \frac{1}{2^p} I\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est-elle dans $GL_n(\mathbb{R})$ à partir d'un certain rang ? En déduire que l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
8. **Application** Soient A et B deux matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On souhaite démontrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a : $\det(\lambda I - AB) = \det(\lambda I - BA)$.
   a) Démontrer le résultat souhaité lorsque la matrice A est inversible.
   b) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 3

Dans tout l'exercice n est dans $\mathbb{N}^*$.
On note $\mathbb{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ où $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Le crochet de deux éléments de $\mathbb{E}$ est défini par : $[A, B] = AB - BA$.

On notre tr la forme linéaire sur $\mathbb{E}$ définie, lorsque $M = [m_{i,j}] \in \mathbb{E}$, par : $\mathrm{tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}$.

La transposée d'un élément A de $\mathbb{E}$ est notée $A^\top$.

Pour $A \in \mathbb{E}$ on note ad_A l'application de $\mathbb{E}$ dans lui même définie, pour $M \in \mathbb{E}$, par :

$$\mathrm{ad}_A(M) = [A, M].$$

On notera $\mathrm{Spec}(A)$ l'ensemble des valeurs propres d'un élément A de $\mathbb{E}$, c'est à dire les éléments de $\mathbb{k}$ pour lesquels il existe un vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{k})$ tel que $AX = \lambda X$.

On note, pour $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$, $E_{i,j}$ l'élément de $\mathbb{E}$ dont tous les termes sont nuls sauf celui de place (i, j) qui est de valeur 1. La matrice identité de $\mathbb{E}$ sera notée I_n.

Partie I - Résultats généraux et exemple

1. Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$.
   a) Démontrer que ad_A est un endomorphisme de $\mathbb{E}$. Est-il injectif ?
   b) Démontrer que $\mathrm{Im}\,\mathrm{ad}_A \subset \ker \mathrm{Tr}$.
2. Démontrer que $\mathbb{E} = \ker \mathrm{tr} \oplus \mathrm{vect}(I_n)$.
3. Dans cette question uniquement, on suppose que $n = 2$, $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   a) Quelle est la matrice T de l'endomorphisme ad_A dans la base $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$?
   b) Vérifier que $T^3 = 4T$.
   c) Démontrer que si λ est valeur propre de T alors λ est racine du polynôme $X^3 - 4X$
   d) Calculer TX_1 et TX_2 où $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   e) Déterminer alors les valeurs propres de T ainsi qu'une base des sous-espaces propres associés.

Partie 2 - Etude d'un sous-espace propre de ad_A associé à une valeur propre non nulle

On suppose dans cette partie que μ est une valeur propre non nulle de ad_A et que $M \in \mathbb{E}$ est un vecteur propre associé, i.e. M est un matrice non nulle telle que $\mathrm{ad}_A(M) = \mu M$.

4. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a : $\mathrm{ad}_A(M^k) = k\mu M^k$.
5. Démontrer que M est nilpotente.
   On note, dans la suite de cette question, p le plus petit entier tel que $M^p = 0$ et $M^{p-1} \neq 0$.
6. Démontrer l'existence de $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{k})$ tel que la famille $(X, MX, \ldots, M^{p-1}X)$ soit libre dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{k})$. Comparer alors n et p.

Partie 3 - Matrices de trace nulle

Le but de cette partie est de démontrer que les matrice de trace nulle sont exactement les crochets, c'est à dire les matrices de la forme $[A, B]$ avec A et B dans $\mathbb{E}$.

7. Soient E un espace vectoriel de dimension finie $p \geqslant 2$ et f dans $\mathcal{L}(E)$.
   a) On suppose que pour tout x dans E on a : $(x, f(x))$ lié.
   Démontrer que f est une homothétie.
   L'hypothèse E de dimension finie est-elle indispensable ?
   b) On suppose qu'il existe une partie D de E dense dans E telle que pour tout x dans D on ait : $(x, f(x))$ lié. La fonction f est-elle une homothétie ?
   On pourra admettre que toute suite bornée dans E admet une sous-suite convergente.
8. Soit M dans $\mathbb{E}$ de trace nulle.
   a) Démontrer que M est semblable à une matrice dont le terme de place $(1, 1)$ est nul (on pourra utiliser la question 7a).
   b) Démontrer que M est semblable à une matrice dont tous les termes diagonaux sont nuls.
9. Démontrer que toute matrice M de $\mathbb{E}$ à termes diagonaux nuls est un crochet.
10. Démontrer que toute matrice de $\mathbb{E}$ semblable à un crochet est un crochet.
11. Démontrer que les matrice de trace nulle dans $\mathbb{E}$ sont exactement les crochets.

FIN DE L'ÉNONCÉ