Composition n° 1, une correction

Exercice 1 - Endomorphismes cycliques

Partie I - Étude d'un premier exemple

1. On a $f(v) = (4, 1)$ donc la famille $\beta = (v, f(v))$ est libre, car on a deux vecteurs non colinéaires, et comme $2 = \dim \mathbb{R}^2$, β est une base de E. Ainsi f est un endomorphisme cyclique de $\mathbb{R}^2$.
2. En notant *can* la base canonique de $\mathbb{R}^2$ on a :

$$M = [f]_{can} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\chi_M(X) = \chi_f(X) = X^2 - 5X + 6 = (X-3)(X-2)$ d' où $\mathrm{Spec}(f) = \{2, 3\}$ (et f est diagonalisable car deux valeurs propres distinctes).

On a de suite en regardant les matrices $M - 2I$ et $M - 3I$: $\ker(f - 2\mathrm{Id}_E) = \mathrm{vect}((1, 1))$ et $\ker(f - 3\mathrm{Id}_E) = \mathrm{vect}((2, 1))$.

3. En prenant n'importe quel vecteur w qui est vecteur propre de f (il y en a plein, d'après la question précédente), $f(w)$ est alors colinéaire à w et donc la famille $(w, f(w))$ est liée.

Partie II - Étude d'un deuxième exemple

4. Un petit calcul donne $M^2 = M + 2I_3$ donc $g^2 = g + 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

5. La question précédente permet de dire que $X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$ est un polynôme annulateur de M. Comme P est scindé à racines simples, la matrice M est diagonalisable et $\mathrm{Spec}(M) \subset \{-1, 2\}$.
Il est immédiat de vérifier que la matrice $M + I$ est singulière (car de rang 1) donc -1 est bien valeur propre de M. Puis on a :

$$M - 2I = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Comme $C_1 - C_2 = -C_3$ (avec des notations évidentes), la matrice $M - 2I$ est aussi singulière.
Ainsi $\mathrm{Spec}(M) = \{-1, 2\}$.

6. Soit $v \in \mathbb{R}^3$. Comme $g^2 = g + 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, on a $g^2(v) = g(v) + 2v$. Ainsi la famille $(v, g(v), g^2(v))$ est liée.
L'endomorphisme g n'est donc pas cyclique.

Partie III - Cas général

7. La famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$, qui contient p éléments, est génératrice de E (par la définition d'un cycle) : elle contient donc au moins $n = \dim E$ éléments ce qui prouve que $\boxed{p \geqslant n}$.

8. • Soit k dans $\{0, \ldots, p-1\}$. On a alors $f^p(f^k(x_0)) = f^{p+k}(x_0) = f^k(\underbrace{f^p(x_0)}_{=x_0}) = f^k(x_0)$.

Fixons alors x dans E. Comme $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ est une famille génératrice de E, il existe $\alpha_0, \ldots, \alpha_{p-1}$ dans $\mathbb{C}$ tels que :

$$x = \alpha_0 x_0 + \cdots + \alpha_{p-1} f^{p-1}(x_0) = \sum_{k=0}^{p-1} f^k(x_0)$$

Par linéarité de f on a :

$$f^p(x) = \sum_{k=0}^{p-1} f^p(f^k(x_0)) = \sum_{k=0}^{p-1} f^k(x_0) = x$$

Il en résulte que pour tout x dans E on a $f^p(x) = x$ et ainsi $\boxed{f^p = \mathrm{Id}_E}$.

• Selon ce qui précède on a $f^p = \mathrm{Id}_E$ donc (sachant que $p \geqslant n \geqslant 1$) on obtient correctement :

$$f \circ f^{p-1} = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad f^{p-1} \circ p = \mathrm{Id}_E$$

ce qui permet d'affirmer que $\boxed{f \text{ est bijective de bijection réciproque } f^{p-1}}$.

9. a) Notons, puisque $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ est génératrice de E, que $x_0 \neq 0_E$. Appelons maintenant $\mathcal{E}$ l'ensemble des k entiers naturels tels que $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{k-1}(x_0))$ soit libre.
L'ensemble $\mathcal{E}$ est **non vide** puisque la famille x_0 est libre donc $0 \in E$ et est **majoré** par n puisque toute famille de cardinal strictement supérieur à $n = \dim E$ est liée.
En résumé, $\mathcal{E}$ est **une partie non vide et majorée** de $\mathbb{N}$: **elle admet un plus grand élément** qui est l'entier m cherché.

b) Par définition de m, la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^m(x_0))$ est liée : il existe donc $\alpha_0, \ldots, \alpha_m$ dans $\mathbb{C}$, **non tous nuls**, tels que :

$$\alpha_0 x_0 + \cdots + \alpha_m f^m(x_0) = 0 \qquad (\clubsuit)$$

Supposons un instant que $\alpha_m = 0$; il reste alors $\alpha_0 x_0 + \cdots + \alpha_{m-1} f^{m-1}(x_0) = 0$.
Comme la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0))$ est libre il vient :

$$\alpha_0 = \ldots = \alpha_{m-1} = 0$$

et on obtient une contradiction avec le fait que $\alpha_0, \ldots, \alpha_m$ sont non tous nuls. Ainsi $\boxed{\alpha_m \neq 0}$.
En vertu de ($\clubsuit$), on peut alors écrire :

$$\boxed{f^m(x_0) = -\frac{\alpha_0}{\alpha_m} x_0 - \cdots - \frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m} f^{m-1}(x_0)}$$

c) • Supposons que pour un certain $k \geqslant m$ entier le vecteur $f^k(x_0)$ est combinaison linéaire des éléments de la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0))$. Il existe alors $\alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1}$ dans $\mathbb{C}$ tels que :

$$f^k(x_0) = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i f^i(x)$$

On a alors par linéarité de f :

$$f^{k+1}(x_0) = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i f^{i+1}(x) = \sum_{i=0}^{m-2} \alpha_i f^{i+1}(x) + \alpha_{m-1} f^m(x_0)$$

Mais on vient de démontrer, à la question précédente, que $f^m(x_0)$ est combinaison linéaire d'éléments de la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0))$ donc $f^{k+1}(x_0)$ est combinaison linéaire d'éléments de $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0))$.

Conclusion. Par récurrence on peut donc affirmer que pour tout $k \geqslant m$ entier, $f^k(x_0)$ est combinaison linéaire des éléments de la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0))$ et on peut noter que c'est encore vrai pour k entier naturel quelconque.

d) Prenons x dans M . Comme $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ est une famille génératrice de E, x est combinaison linéaire complexe des éléments de $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ qui eux même, en vertu de la question précédente, sont des combinaison linéaires des éléments de $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0))$.
Il en résulte que la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0))$ est génératrice de E et comme c'est une famille libre (via la définition de m), on peut conclure que c'est une base de E (qui est de dimension n) ; comme cette famille contient m éléments on a $\boxed{n = m}$.

10. a) La famille $\gamma = (x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E et $f^n(x_0)$ est un vecteur de E : les complexes $a_0, \ldots, a_{n-1}$ ne sont autres que les **composantes** de $f^n(x_0)$ dans la base γ.

b) Posons $h = f^n - a_0 \mathrm{Id}_E + a_1 f + \ldots + a_{n-1} f^{n-1} = f^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i$. On a $h \in \mathcal{L}(E)$ et f et h commutent puique h est un polynôme en f. Pour tout k dans $0, \ldots, n-1$ on a alors :

$$h(f^k(x_0)) = h \circ f^k(x_0) = f^k \circ h(x_0) = f^k(h(x_0)) = f^k(0) = 0$$

Ainsi l'image de tout vecteur de la base γ par h est nul. Comme h est linéaire on en déduit que $h = 0$ et ainsi :

$$\boxed{f^n = a_0\mathrm{Id}_E + a_1 f + \ldots + a_{n-1}f^{n-1}}$$

c) Pour tout k dans $\{0, \ldots, n-2\}$ on a $f(f^k(x_0)) = f^{k+1}(x_0)$ et

$$f(f^{n-1}(x_0)) = f^n(x_0) = a_0x_0 + a_1f(x_0) + \ldots + a_{n-1}f^{n-1}(x_0)$$

donc la matrice de f dans la base γ est :

$$[f]_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

d) • Si λ est complexe, le rang de $f - \lambda\mathrm{Id}_E$ est aussi le rang de la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & -\lambda & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} - \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

Or les $n-1$ premières colonnes de M forment une famille de vecteurs échelonnés donc libre ; la matrice admet au moins $n-1$ colonnes indépendantes : son rang est supérieur à $n-1$ et ainsi $\boxed{\mathrm{rg}(f - \lambda\mathrm{Id}_E) \geqslant n-1}$.

• Soit λ réel. Le théorème du rang affirme que $n = \dim\ker(f - \lambda\mathrm{Id}_E) + \mathrm{rg}(f - \lambda\mathrm{Id}_E)$. Ainsi :

$$\dim\ker(f - \lambda\mathrm{Id}_E) = n - \mathrm{rg}(f - \lambda\mathrm{Id}_E) \leqslant 1 \quad (\heartsuit)$$

Si maintenant λ est valeur propre de f alors $\ker(f - \lambda\mathrm{Id}_E)$ est non trivial donc $\dim\ker(f - \lambda\mathrm{Id}_E) \geqslant 1$ et avec $(\heartsuit)$ on peut conclure que $\boxed{\text{les sous-espaces propres de } f \text{ sont de dimension 1}}$.

11. a) Si λ est valeur propre de f alors il existe x dans E **non nul** tel que $f(x) = \lambda x$ et une récurrence immédiate permet de dire que $f^n(x) = \lambda^n x$. Mais on a démontré à la question 2 de la partie 2 que $f^n = \mathrm{Id}_E$; il vient ainsi $x = \lambda^n x$. Comme x est non nul on a donc $\boxed{\lambda = 1}$.

b) Pour tout k dans $\{0, \ldots, n-2\}$ on a toujours $f(f^k(x_0)) = f^{k+1}(x_0)$ et $f(f^{n-1}(x_0)) = x_0$ puisque f est cyclique d'ordre n. La matrice de f dans la base $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ est donc :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

c) • Si λ est valeur propre de f on a vu que $\lambda^n = 1$ donc λ est une racine complexe de l'unité et il existe alors k dans $\{0, \ldots, n-1\}$ tel que :

$$\lambda = \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} = \omega_k$$

• Cherchons maintenant lesquelles de ces racines de l'unité sont effectivement valeurs propres de f.
$\boxed{\text{Fixons } k \text{ dans } \{0, \ldots, n-1\}}$ et regardons si ω_k est valeur propre de f. Pour v vecteur de E dont la colonne

des coordonnées dans $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ on a :

$$f(v) = \omega_k v \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \omega_k \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow (S) \begin{cases} v_n = \omega_k v_1 \\ v_1 = \omega_k v_2 \\ \dots \\ v_{n-1} = \omega_k v_n \end{cases}$$

• Posons alors $v_n = 1$. On pose encore $v_{n-1} = \omega_k v_n$ et ainsi de suite jusqu'à $v_1 = \omega_k v_2$. Par produit membre à membre de ces $n-1$ égalités on obtient :

$$v_1 v_2 \dots v_{n-1} = \omega_k^{n-1} v_2 \dots v_n \quad \text{i.e.} \quad v_1 = \omega_k^{n-1} v_n$$

Comme $\omega_k^n = 1$ on a alors $v_n = \omega_k v_1$ de sorte que $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{C}^n$ est bien solution de (S). Il en résulte que ω_k est bien valeur propre de f puisque le vecteur $V_k = \omega_k^{n-1} x_0 + \omega_k^{n-2} f(x_0) + \dots + f^{n-1}(x_0) = \sum_{j=0}^{n-1} \omega_k^{n-1-j} f^j(x_0)$ (qui est non nul) vérifie :

$$f(V_k) = \omega_k V_k$$

• En conclusion f admet n **valeurs propres distinctes** qui sont $\omega_0, \dots, \omega_{n-1}$.

Remarque. Il en résulte que f est diagonalisable.
Chaque espace propre est de dimension 1 et une base de l'espace propre associé à la valeur propre ω_k est donnée par le vecteur : $\sum_{j=0}^{n-1} \omega_k^{n-1-j} f^j(x_0)$.

Exercice 2 - Projecteurs...

Partie 1 - Traces et projecteurs

1. On a, avec des notations évidentes :

$$\mathrm{tr}(\mathbb{AB}) = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{i,j}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{i,j} a_{i,j} = \mathrm{tr}(\mathbb{BA}).$$

2. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de X. Soient Q la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. On a alors :

$$[f]_{\mathcal{B}'} = Q^{-1} [f]_{\mathcal{B}} Q$$

En appliquant la question précédente avec $\mathbb{A} = Q^{-1}[f]_{\mathcal{B}}$ et $\mathbb{B} = Q$, on obtient :

$$\mathrm{tr}([f]_{\mathcal{B}'}) = \mathrm{tr}(QQ^{-1}[f]_{\mathcal{B}}) = \mathrm{tr}([f]_{\mathcal{B}}).$$

3. Pour tout x, $p(x - p(x)) = 0$ puisque $p^2 = p$ ce qui prouve que $x - p(x) \in \ker p$. Comme $p(x)$ est élément de $\mathrm{Im}\, P$, on vient de vérifier que $E = \mathrm{Im}\, p + \ker p$.
De plus par le théorème du rang :

$$\dim E = \dim(\mathrm{Im}\, p) + \dim(\ker p)$$

La dimension de la somme des deux sous-espaces étant la somme des dimensions des sous-espaces, cette somme est directe. Ainsi $E = \mathrm{Im}\, p \oplus \ker p$.

4. Soit r le rang de p. Dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition précédente :

$$[p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $\mathrm{tr}P = r = \mathrm{tr}([p]_{\mathcal{B}}) = r = \mathrm{rg}P$.

5. On a vu précédemment que si $x \in \operatorname{Im} p$ alors $p(x) = x$ donc $q(x) = 0$ aussi $\operatorname{Im} p \subset \ker q$. Réciproquement, si x est élément de $\ker q$, $p(x) = x$ donc $x \in \operatorname{Im} p$. Aussi $\operatorname{Im} p = \ker q$. On vérifie que q est aussi un projecteur : comme q et Id commutent,
$$q^2 = (\mathrm{Id} - p)^2 = \mathrm{Id} - 2p + p^2 = \mathrm{Id} - p$$
En échangeant les rôles de p et de p (puisque $p = \mathrm{Id} - q$), on obtient $\operatorname{Im} q = \ker p$.

6. Par l'identité de Grassmann ou le fait que l'application $\Phi = \begin{pmatrix} F \times G & \longrightarrow & F + G \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{pmatrix}$ est linéaire et surjective par définition de $F + G$. Le théorème du rang donne :
$$\dim(F + G) = \dim(F \times G) - \dim(\ker(\Phi)) \leqslant \dim(F \times G) = \dim F + \dim G.$$

7. On procède par récurrence sur le nombre de projecteurs m intervenant dans la somme.
Pour $m = 1$, $f = p_1$ donc $\mathrm{tr} f = \mathrm{rg} f$ aussi $\mathrm{tr} f \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{tr} f \geqslant \mathrm{rg} f$.
Supposons la propriété vraie à l'ordre $m - 1 \geqslant 1$.
On pose $g = \sum_{i=1}^{m-1} p_i$ donc $f = g + p_m$. Par hypothèse de récurrence $\mathrm{tr} g \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{tr} g \geqslant \mathrm{rg} g$. La trace étant linéaire, $\mathrm{tr} f = \mathrm{tr} g + \mathrm{tr} p_m \in N$ comme somme de deux entiers.
De plus, pour tout x de E : $f(x) = g(x) + p_m(x)$ donc $\operatorname{Im} S \subset \operatorname{Im} g + \operatorname{Im} p_m$.
En utilisant la question précédente et $\dim \operatorname{Im} p_m = \mathrm{rg}(p_m)$:
$$\mathrm{rg}(f) = \dim \operatorname{Im} f \leqslant \mathrm{rg}(g) + \mathrm{rg}(p_m) \leqslant \dim \operatorname{Im} g + \dim \operatorname{Im} p_m = \dim \operatorname{Im} g$$
On a donc prouvé par récurrence que pour tout entier naturel m :
$$S = \sum_{i=1}^{m} p_i \Rightarrow \mathrm{tr} f \in \mathbb{N} \text{ et } \mathrm{tr} f \geqslant \mathrm{rg} f.$$

Partie 2 - Projecteurs de rang 1

8. Soit y un élément non nul de $\operatorname{Im} p$: c'est donc une base de $\operatorname{Im} p$ puisque $\mathrm{rg} p = 1$. Puis $p \circ f(y)$ est une image par p donc appartient à $\operatorname{Im} P$. Ainsi il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $p \circ f(y) = \mu y$.
Or pour tout x de E, $p(x)$ est colinéaire à y ($p(x) = \alpha y$) donc
$$p \circ f \circ p(x) = p \circ f(\alpha y) = \mu \alpha y = \mu p(x)$$
ce qui prouve que : $p \circ f \circ p = \mu p$.

9. Comme ε_1 est dans $\operatorname{Im} p$, d'après ce qui précède, $p(\varepsilon_1) = \mu \varepsilon_1$. Comme $\varepsilon_1 - p(\varepsilon_1)$ est élément de $\ker p = \mathrm{vect}\varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$, cela justifie la forme de la première colonne de $[f]_{\mathcal{C}}$, les autres colonnes étant quelconques.

10. Par définition de q, $[q]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & \mathbb{I}_{n-1} \end{pmatrix}$. Si on écrit de la même façon, $[f]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \mu & L \\ C & \mathbb{B} \end{pmatrix}$, un calcul en blocs donne alors :
$$[q]_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0_{1,n-1} \\ C & \mathbb{B} \end{pmatrix}$$
donc : $[q]_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{C}}[q]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & \mathbb{B} \end{pmatrix}$.
Ainsi on a les équivalences, pour $\alpha \in \mathbb{R}$:
$$q \circ f \circ q = \alpha q \Leftrightarrow [q]_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{C}}[q]_{\mathcal{C}} = \alpha [q]_{\mathcal{C}} \Leftrightarrow \mathbb{B} = \alpha \mathbb{I}_{n-1}.$$
On a ainsi vérifié que : $\mathbb{B}$ n 'est pas la matrice d'une homothétie si et seulement si $q \circ f \circ q$ n'est pas proportionnel à q.

Remarque : il suffisait d'une implication donc de montrer que si $\mathbb{B} = \alpha \mathbb{I}_{n-1}$ alors $Q \circ T \circ Q = \alpha Q$.

Exercice 3

Partie A - L'opérateur de translation

1. Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, un polynôme non nul de $\mathbb{R}_n[X]$, de degré $d = \deg(P)$ (i.e. $a_d \neq 0$).
   Alors, $\tau(P)$ est de la forme :

$$P(X+1) = \sum_{k=0}^{d} a_k (X+1)^k = a_d X^d + (d a_d + a_{d-1}) X^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2} b_k X^k$$

   Comme $a_d \neq 0$ il vient :

$$\boxed{\deg(\tau(P)) = \deg(P) \text{ et } \mathrm{cd}(\tau(P)) = \mathrm{cd}(P)}$$

2. Notons que $\tau^0(P) = P$ et si pour un certain $k \in \mathbb{N}$ on a $\tau^k(P)(X) = P(X+k)$, alors $\tau^{k+1}(P)(X) = \tau(\tau^k(P))(X) = P((X+k)+1) = P(X+(k+1))$.
   Ainsi, par récurrence : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \tau(P)(X) = P(X+k)}$.

3. D'après la formule du binôme de Newton, pour tout $j \in \{1, \ldots, n+1\}$ on a :

$$\tau(P_j)(X) = (X+1)^{j-1} = \sum_{h=0}^{j-1} \binom{j-1}{h} X^h = \sum_{i=1}^{j} \binom{j-1}{i-1} P_i$$

   La matrice M est donc triangulaire supérieure et les coefficients de M vérifient donc, pour tout $(i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2$:

$$(M)_{i,j} = \begin{cases} \binom{j-1}{i-1} & \text{pour} \quad i \leqslant j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4. La matrice M est triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres se trouvent sur la diagonale. Il s'agit des nombres $\binom{j-1}{j-1} = 1$.

   NB. La matrice M n'est pas diagonalisable : si M était diagonalisable, elle serait alors semblable à la matrice unité, donc égale à la matrice unité.

5. • Comme 0 n'est pas valeur propre de τ, l'application τ est injective. Comme c'est un endomorphisme injectif d'un espace vectoriel de dimension finie, elle est bijective.

   • Soit $\overline{\tau} : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X], P(X) \mapsto P(X-1)$. Cette application est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui vérifie $\tau \circ \overline{\tau} = \overline{\tau} \circ \tau = \mathrm{id}$. Ainsi $\tau^{-1} = \overline{\tau}$.

   • Comme pour la question 2), on montre que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\tau^{-k}(P)(X) = P(X-k)$.
   Donc la formule est toujours vraie :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{Z},\ \tau(P)(X) = P(X+k)}$$

6. On utilise τ^{-1}, sachant que M^{-1} est sa matrice dans la base canonique.. Pour tout $j \in \{1, \ldots, n+1\}$ on a :

$$tau^{-1}(P_j)(X) = (X-1)^{j-1} = \sum_{h=0}^{j-1} \binom{j-1}{h} (-1)^{j-1-h} X^h = \sum_{i=1}^{j} (-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1} P_i.$$

   Ainsi, pour tout $(u,j) \in \{1, \ldots, n\}^2$ on a :

$$\boxed{(M^{-1})_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{j-i}\binom{j-1}{i-1} & \text{pour} \quad i \leqslant j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

7. *Analyse.* Si une matrice Q convient, la $k+1^{\text{e}}$ ligne du calcul $V = Q \times U$ donne :

$$v_k = \sum_{j=1}^{n+1} Q_{k+1,j} u_{j-1} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} u_j.$$

Synthèse.

En prenant la matrice Q dont les coefficients sont $Q_{k,j} = \begin{cases} \binom{k-1}{j-1} & \text{pour} \quad j \leqslant k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, c'est dire $Q = M^T$, tout marche bien.

8. La matrice M est inversible, donc $Q = M^T$ également avec $Q^{-1} = (M^T)^{-1} = (M^{-1})^T$.
Puis, comme $V = Q \times U$ il vient : $U = Q^{-1} \times V = (M^{-1})^T \times V$. La $k+1^{\text{e}}$ ligne de ce calcul donne alors

$$\begin{aligned} u_k &= \sum_{j=1}^{n+1} \left((M^{-1})^T\right)_{k+1,j} v_{j-1} = \sum_{j=1}^{n+1} \left((M^{-1})\right)_{j,k+1} v_{j-1} = \sum_{j=0}^{n} \left((M^{-1})\right)_{j+1,k+1} v_j \\ &= \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j \end{aligned}$$

9. • Pour $k \in \mathbb{N}$ on a $v_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda^j = (\lambda+1)^k$ et on vérifie bien que :

$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (\lambda+1)^j (-1)^{k-j} = ((\lambda+1)-1)^k = u_k$$

Partie B - L'opérateur de différence

10. Avec les mêmes notations qu'à la question 1, avec P *non constant*, on a :

$$\delta(P)(X) = a_d X^d + (da_d + a_{d-1}) X^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2} b_k X^k - a_d X^d - a_{d-1} X^{d-1} - \sum_{k=0}^{d-2} a_k X^k = da_d X^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2} c_k X^k$$

Comme $a_d \neq 0$:

$$\boxed{\text{si } P, \text{ non constant, } \deg(\delta(P)) = \deg(P) - 1 \text{ et } \operatorname{cd}(\delta(P)) = \deg(P) \times \operatorname{cd}(P)}$$

11. • D'après la question précédente, si P n'est pas constant, $\deg(P) \geqslant 1$ et $\deg(\delta(P)) \geqslant 0$, donc $\delta(P)$ n'est pas nul. Ainsi, si $\delta(P) = 0$, alors P est constant.
Réciproquement, si P est constant, le calcul (simple) donne $\delta(P) = 0$.

Conclusion. $\boxed{\ker(\delta) = \mathbb{R}_0[X]}$.

•La question précédente montre aussi que $\operatorname{Im}(\delta) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Or, d'après le théorème du rang : $\dim(\operatorname{Im}(\delta)) = n + 1 - \dim(\ker(\delta)) = n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$, ce qui permet de conclure que : $\boxed{\operatorname{Im}(\delta) = \mathbb{R}_{n-1}[X]}$.

12. • Supposons que pour un certain $j < n$ on ait : $\ker(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X]$. On a alors

$$P \in \ker(\delta^{j+1}) \Leftrightarrow \delta^{j+1}(P) = 0 = \delta^j(\delta(P)) \Leftrightarrow \delta(P) \in \mathbb{R}_{j-1}[X] \Leftrightarrow P \in \mathbb{R}_j[X]$$

Ainsi, par récurrence finie, initialisée à la question précédente :

$$\boxed{\forall j \in \{1, \ldots, n\}, \ \ker(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X]}$$

• Soit $P \in \operatorname{Im}(\delta^j)$. Il existe alors $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P = \delta^j(Q)$.
Une récurrence montre que $\deg P = \deg(Q) - j$, donc $\deg(P) \leqslant n - j$ d'où $P \in \mathbb{R}_{n-j}[X]$, et donc $\operatorname{Im}(\delta^j) \subset \mathbb{R}_{n-j}[X]$.
Le théorème du rang assure par ailleurs que ces deux espaces ont même dimension, donc :

$$\boxed{\forall j \in [\![1, n]\!], \ \operatorname{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X]}$$

13. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
Comme $\delta = \tau - \mathrm{id}$ et comme τ et Id commutent, la formule de Newton s'applique :

$$\delta^k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \tau^j.$$

14. Si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] = \ker(\delta^n)$, alors $\delta^n(P) = 0$. Donc :

$$0(X) = [\delta^n(P)](X) = [\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \tau^j(P)](X) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} [\tau^j(P)(X)] = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(X+j)$$

il s'agit bien du polynôme nul.
Et en particulier en la valeur réelle $X = 0$:

$$\boxed{\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(j) = 0}$$

15. a) On a : $u \circ \delta^2 = u \circ [u^2 \circ u^2] = u^5 = [u^2 \circ u^2] \circ u = \delta^2 \circ u$.

    b) Soit $P \in \mathbb{R}_1[X] = \ker \delta^2$. On a $\delta^2(u(P)) = u(\delta^2(P)) = u(0) = 0$, donc $u(P) \in \ker(\delta^2) = \mathbb{R}_1[X]$. Le sous-espace $\mathbb{R}_1[X]$ est donc stable par u.

    c) Supposons qu'il existe une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ qui vérifie $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
    Il vient alors $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = A \times A^2 = A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi $a = d$ et $c = 0$ d'où $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.
    Puis $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$ donc $a = 0$ et $2ab = 0$ ce qui est contradictoire avec $ab = 1$.

    Conclusion. Il n'existe pas de matrice A qui vérifie $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

    d) Puisque $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par u, on peut considérer l'endomorphisme induit $\tilde{u} : \mathbb{R}_1[X] \to \mathbb{R}_1[X], P \mapsto u(P)$.
    On note alors A la matrice de $\tilde{u}$ dans la base (P_1, P_2) de $\mathbb{R}_1[X]$. Il vient $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ce qui est impossible.

    Conclusion. $\boxed{\text{Il n'existe pas d'endomorphisme } u \text{ de } \mathbb{R}_n[X] \text{ tel que } u^2 = \delta}$.

16. a) On a vu que $\deg(\delta^i(P)) = \deg(P) - i = d - i$.
    Ainsi, la famille $(P, \delta(P), \dots \delta^d(P))$ est une famille de degré échelonné (de d à 0) : c'est une famille libre.
    Ainsi, puisque $\mathbb{R}_d[X]$ est de dimension $d+1$ il vient : $\mathrm{vect}(P, \delta(P), \dots \delta^d(P)) = \mathbb{R}_d[X]$.

    b) Soit V un sous-espace de $\mathbb{R}_n[X]$ stable par δ.
    Remarquons que si $P \in V$, alors $\delta^i(P) \in V$ et ainsi $\mathbb{R}_{\deg(P)}[X] = \mathrm{vect}(P, \delta(P), \dots \delta^n(P)) \subset V$.

    Posons $d = \dim(V) - 1$ et on considère une base $(Q_0, \dots Q_d)$ de V. L'un des polynôme Q_i est alors de degré supérieur ou égal à d (sinon $V \subset \mathbb{R}_{d-1}[X]$ et on a un problème avec les dimensions). Notons P ce polynôme et supposons un instant que $\deg P = r > d$. Dans ce cas on a :

    $$\mathbb{R}_r[X] = \mathrm{vect}(P, \delta(P), \dots \delta^r(P)) \subset V,$$

    et donc $\dim V > d + 1$ ce qui est absurde.
    Il existe ainsi bien un polynôme P de degré d dans V et on a alors, comme ci-dessus, $\mathbb{R}_d[X] \subset V$. Par égalité des dimensions il vient $V = \mathbb{R}_d[X]$.