Composition n° 1

Le samedi 19 septembre 2026

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*La **présentation** de la copie doit être correcte, les résultats mis en valeur et les feuilles numérotées.*
Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. La clarté, la précision et la concision de la rédaction entrent dans une part importante de l'évaluation.
Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun.

Exercice 1 - Endomorphismes cycliques

Présentation générale
Dans cet exercice, nous allons étudier la notion d'endomorphisme cyclique et d'endomorphisme cyclique d'ordre p, dont les définitions sont données ci-dessous. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$f^0 = \mathrm{Id}_E, \quad f^1 = f, \quad f^2 = f \circ f, \quad f^p = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{p \text{ fois}}.$$

On dit que f est ***cyclique*** s'il existe un vecteur $v \in E$ tel que la famille $\big(v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v)\big)$ soit une base de l'espace vectoriel E.

Si $p \in \mathbb{N}^*$ on dit que f est ***cyclique d'ordre*** p s'il existe un élément x_0 de E tel que :

- $f^p(x_0) = x_0$;
- $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ est une famille génératrice de E ;
- La famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ est constituée d'éléments distincts.

La famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ est alors appelée un *cycle* de f.

Lorsque f est un endomorphisme de E, une valeur propre de f est un complexe λ tel que $\ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq \{0\}$.
Cet exercice est composé de trois parties indépendantes. Les deux premières sont consacrées à l'étude d'exemples. Dans la dernière partie, on s'intéresse au cas général.

Partie I - Étude d'un premier exemple

Dans cette partie, on considère l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (4x - 2y, x + y)$$

1. En considérant $v = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$, montrer que f est un endomorphisme cyclique de $\mathbb{R}^2$.
2. Quelle est la matrice M de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$?
   Déterminer les valeurs propres de M et donner une base de chaque sous-espace propre de A.
3. Existe-t-il un vecteur $w \in \mathbb{R}^2$ non nul tel que la famille $(w, f(w))$ ne soit pas une base de $\mathbb{R}^2$?

Partie II - Étude d'un deuxième exemple

Dans cette partie, on considère l'endomorphisme $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

4. Montrer que l'on a la relation $g^2 = g + 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.
5. Déterminer le spectre de M et ses sous-espaces propres.
6. L'endomorphisme g est-il cyclique ?

Partie III - Cas général

Dans cette partie E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension $n \geqslant 1$ et on suppose que f est un endomorphisme cyclique d'ordre p de E. Soit $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ un cycle de f.

7. Démontrer que $p \geqslant n$.
8. Démontrer que $f^p = \mathrm{Id}_E$. En déduire que f est bijective.
9. a) Justifier de l'existence d'un plus grand entier k tel que la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{k-1}(x_0))$ soit libre.

   On appellera m cet entier dans la suite du problème.

   b) Démontrer que $f^m(x_0)$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des éléments de la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0))$

   c) Démontrer par récurrence que pour tout $k \geqslant m$ entier, $f^k(x_0)$ est combinaison linéaire des éléments de la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0))$.

   d) Montrer que $m = n$. Qu'en déduire pour la famille $\gamma = (x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0))$?
10. On note $a_0, \ldots, a_{n-1}$ les complexes tels que :

$$f^n(x_0) = a_0 x_0 + a_1 f(x_0) + \ldots + a_{n-1} f^{n-1}(x_0)$$

   a) Justifier brièvement de l'existence et de l'unicité de ces complexes $a_0, \ldots, a_{n-1}$.

   b) Démontrer que :

$$f^n = a_0 \mathrm{Id}_E + a_1 f + \ldots + a_{n-1} f^{n-1}$$

   c) Déterminer la matrice de f dans la base $\gamma = (x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$.

   d) Démontrer que pour tout λ complexe $\mathrm{rg}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \geqslant n - 1$. En déduire que si λ complexe est valeur propre de f alors $\dim \ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E) = 1$.
11. On suppose dans cette question que f est cyclique d'ordre n.

   a) Démontrer que si λ complexe est valeur propre de f alors $\lambda^n = 1$.

   b) Déterminer la matrice de f dans la base $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$.

   c) Démontrer que f les valeurs propres de f sont exactement les racines n-ièmes de l'unité.

Exercice 2 - Projecteurs...

Notations

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels.

Dans tout l'exercice, E est un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ sur le corps des réels et f un endomorphisme non nul de E.

Soit $\mathcal{B}$ une base de E, on note $[f]_{\mathcal{B}}$ la matrice représentant f dans cette base. On note $\ker f$ le noyau de f et $\mathrm{Im}\, f$ l'image de f.
On dit que f est une homothétie si c'est un multiple scalaire de l'identité. On appelle projecteur un endomorphisme p de E idempotent, c'est-a-dire tel que $p^2 = p$. On note Id l'endomorphisme identité de E, $\mathbb{I}_n$ la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{O}_n$ la matrice nulle.

Partie 1 - Traces et projecteurs

1. Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\mathrm{tr}(\mathbb{AB}) = \mathrm{tr}(\mathbb{BA})$.
2. Montrer que la trace de la matrice $[f]_{\mathcal{B}}$ associée à f est indépendante de la base $\mathcal{B}$.

Soit p un projecteur de E. On pose $q = Id - p$.

3. Démontrer que $E = \mathrm{Im}\, p \oplus \ker p$.
4. En déduire que $\mathrm{rg}p = \mathrm{tr}p$.
5. Montrer que $\mathrm{Im}\, q = \ker p$ et que $\mathrm{Im}\, p = \ker q$.
6. Démontrer que la dimension de la somme de deux sous-espaces F et G de E est inférieure ou égale à la somme de leurs dimensions.
7. Montrer que si l'endomorphisme f est une somme finie de projecteurs p_i, $i \in [\![1, m]\!]$, alors $\mathrm{tr}f \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{tr}f \geqslant \mathrm{rg}f$.

Partie 2 - Projecteurs de rang 1

On suppose dans cette partie que le rang du projecteur p est égal à 1.

8. Démontrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $p \circ f \circ p = \mu p$.

Soit $\mathcal{C} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\}$ une base de E adaptée à la décomposition $E = Im\, p \oplus \ker p$.

9. Montrer que dans la base $\mathcal{C}$ la matrice représentant f s 'écrit

$$(1) \qquad [f]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \mu & * & \cdots & * \\ * & & & \\ \vdots & & \mathbb{B} & \\ * & & & \end{pmatrix}.$$

où μ est le nombre réel dont l'existence a été prouvé en question 8 et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{n-1}$.

10. Montrer que si $q \circ f \circ q$ n'est pas proportionnel à q, alors $\mathbb{B}$, défini en (1), n'est pas la matrice d'une homothétie. On rappelle que $q = \mathrm{Id} - p$.

Exercice 3

Dans tout le texte, $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1 et $\mathbb{R}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note P_k le polynôme X^{k-1}. On rappelle que $\mathbb{R}_n[X]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n+1$ dont la famille $(P_k)_{k\in\{1,\ldots,n+1\}}$ est une base. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $\deg(P)$ le degré de P et, lorsque P est non nul, $\mathrm{cd}(P)$ désigne le coefficient dominant de P, c'est-à-dire le coefficient du monôme $X^{\deg(P)}$.

Pour $k \in \mathbb{N}$ et $j \in \{1, \ldots, k\}$, le coefficient binomial $\binom{k}{j}$ vaut $\dfrac{k!}{j!(k-j)!}$.

Pour un ensemble E et $f : E \to E$, on définit l'application $f^k : E \to E$ par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ de la façon suivante :

$$f^0 = \mathrm{Id}_E \text{ et } f^{k+1} = f \circ f^k$$

Si f est bijective, on note f^{-1} la réciproque de f et pour $k \in \mathbb{N}$, on note $f^{-k} = (f^{-1})^k$.

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles de taille p.

On dira qu'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par un endomorphisme f de $\mathbb{R}_n[X]$ lorsque $f(F) \subset F$, c'est à dire lorsque pour tout $P \in F$ on a $f(P) \in F$.

Partie I - L'opérateur de translation

L'opérateur de translation est l'endomorphisme τ de $\mathbb{R}_n[X]$ donné par :

$$\begin{array}{rccc} \tau : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ & P(X) & \mapsto & P(X+1) \end{array}$$

1. Pour un polynôme non nul $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\deg(\tau(P))$ et $\mathrm{cd}(\tau(P))$ à l'aide de $\deg(P)$ et $\mathrm{cd}(P)$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Pour $k \in \mathbb{N}$, donner l'expression de $\tau^k(P)$ en fonction de P.
3. Donner la matrice $M = (M_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}$ de τ dans la base $(P_k)_{k\in\{1,\ldots,n+1\}}$. On exprimera les coefficients $M_{i,j}$ en fonction de i et j.
4. Préciser l'ensemble des valeurs propres réelles de la matrice M, c'est à dire les réels λ tels que la matrice $M - \lambda I$ est non inversible .
5. L'application τ est-elle bijective ? Si oui, préciser τ^{-1}. L'expression de τ^j trouvée à la question 2 pour $j \in \mathbb{N}$ est-elle valable pour $j \in \mathbb{Z}$?
6. Que vaut M^{-1} ? Exprimer les coefficients $(M^{-1})_{i,j}$ en fonction de i et j.
7. On se donne une suite réelle $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et on définit, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$

$$v_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} u_j \qquad (1)$$

Déterminer une matrice $Q \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

8. En déduire la formule d'inversion : pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$u_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j \tag{2}$$

9. On considère un réel λ et la suite $(u_k = \lambda^k)_{k\in\mathbb{N}}$. Quelle est la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par la formule (1) ? Vérifier alors la formule (2).

Partie II - L'opérateur de différence

L'opérateur de différence est l'endomorphisme δ de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\delta = \tau - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$:

$$\begin{array}{rccc} \delta \ : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ & P(X) & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$$

10. Pour un polynôme non constant $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\deg(\delta(P))$ et $\mathrm{cd}(\delta(P))$ à l'aide de $\deg(P)$ et $\mathrm{cd}(P)$.
11. En déduire le noyau $\ker(\delta)$ et $\mathrm{Im}\,(\delta)$ de l'endomorphisme δ.
12. Plus généralement, pour $j \in \{1, \dots, n\}$, montrer les égalités suivantes :

$$\ker(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X] \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}\,(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X] \tag{3}$$

13. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\delta^k(P)$ en fonction des $\tau^j(P)$ pour $j \in \{0, \dots, k\}$.
14. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrer que :

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(j) = 0 \tag{4}$$

15. Dans cette question, on veut montrer qu'il n'existe pas d'application linéaire $u : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ telle que $u \circ u = \delta$. On suppose, par l'absurde, qu'une telle application u existe.
    a) Montrer que u et δ^2 commutent.
    b) En déduire que $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par l'application u.
    c) Montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que : $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
    d) Conclure.
16. Dans cette question, on cherche tous les sous-espaces vectoriels F de $\mathbb{R}_n[X]$ stables par l'application δ.
    a) Pour P polynôme non nul de degré $d \leqslant n$, montrer que la famille $(P, \delta(P), \dots, \delta^d(P))$ est libre. Quel est l'espace vectoriel engendré par cette famille ?
    b) En déduire que si V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ stable par δ et non réduit à $\{0\}$, il existe un entier $d \in \{0, \dots, n\}$ tel que $V = \mathbb{R}_d[X]$.